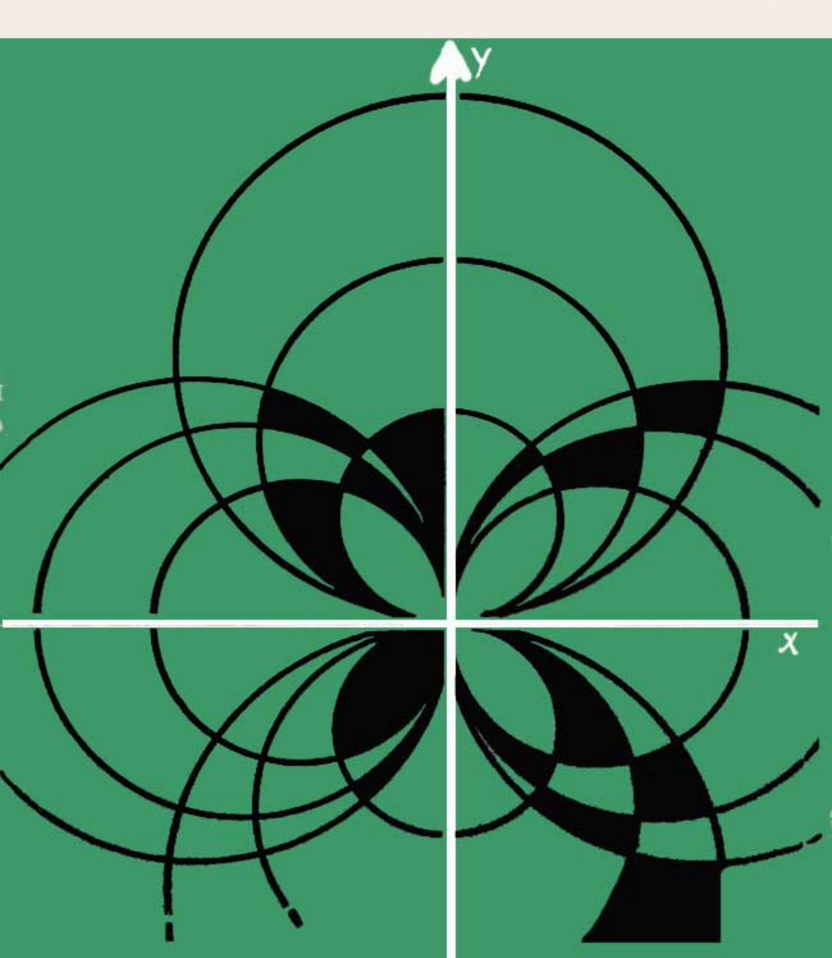
M. KRASNOV
A. KISELIOV
G. MAKARENKO

ECUACIONES INTEGRALES




ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

М. Л. КРАСНОВ, А. И. КИСЕЛЕВ,
Г. И. МАКАРЕНКО

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА" • МОСКВА

M. L. Krasnov
A. I. Kiseliov
G. I. Makarenko

ECUACIONES INTEGRALES

Tercera edición

Editorial Mir

Moscú

Traducido del ruso por
JUAN JOSE TOLOSA

Primera edición, 1970

Segunda edición, 1977

Tercera edición, 1982

На испанском языке

Impreso en la URSS

INDICE

Prólogo 7
Observaciones preliminares 8

Capítulo I. **Ecuaciones integrales de Volterra** 15
§ 1. Conceptos fundamentales 15
§ 2. Nexo entre las ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones integrales de Volterra 18
§ 3. Resolvente de la ecuación integral de Volterra. Resolución de una ecuación integral mediante la resolvente 20
§ 4. Método de las aproximaciones sucesivas 31
§ 5. Ecuaciones de convolución 36
§ 6. *Resolución de las ecuaciones integrodiferenciales mediante la transformación de Laplace* 42
§ 7. Ecuaciones integrales de Volterra con límites $(x, +\infty)$ 44
§ 8. Ecuaciones integrales de Volterra de primera especie 47
§ 9. *Integrales de Euler* 49
§ 10. Problema de Abel. Ecuación integral de Abel y sus generalizaciones 53
§ 11. Ecuaciones integrales de Volterra de primera especie de convolución 59

Capítulo II. **Ecuaciones integrales de Fredholm** 67
§ 12. Ecuaciones de Fredholm de segunda especie. Conceptos fundamentales 67
§ 13. Método de los determinantes de Fredholm 70
§ 14. Núcleos iterados. Construcción de la resolvente mediante los núcleos iterados. 74
§ 15. Ecuaciones integrales con núcleo degenerado. Ecuación de Hammerstein 84
§ 16. Raíces características y funciones propias 93
§ 17. Resolución de las ecuaciones integrales homogéneas con núcleo degenerado 110
§ 18. Ecuaciones simétricas no homogéneas 111
§ 19. *Alternativa de Fredholm* 118
§ 20. Construcción de la función de Green para las ecuaciones diferenciales ordinarias 123

§ 21. Aplicación de la función de Green a la resolución de los problemas de frontera 132
§ 22. Problemas de frontera que contienen un parámetro y su reducción a ecuaciones integrales 135
§ 23. Ecuaciones integrales singulares 138

Capitulo III. **Métodos aproximados** 151
§ 24. Métodos aproximados de resolución de las ecuaciones integrales 151
1. Sustitución del núcleo por uno degenerado . . . 151
2. Método de las aproximaciones sucesivas 155
3. Método de Bubnov-Galiorkin 157
§ 25. Métodos aproximados de determinación de las raíces características 158
1. Método de Ritz 158
2. Método de las trazas 161
3. Método de Kellog 162

Respuestas 165
Apéndice. **Resumen de los métodos fundamentales de resolución de las ecuaciones integrales** 180
Bibliografia 189

PROLOGO

En la actualidad hay en ruso una profusa bibliografía sobre ecuaciones integrales. Es suficiente citar los excelentes libros de I. G. Petrovsky, S. G. Mijlin, los capítulos correspondientes de la obra fundamental de V. I. Smirnov "Curso de Matemáticas Superiores", los libros de W. Lovitt, F. Tricomi y otros.

Sin embargo, por cuanto nosotros conocemos, no hay ningún libro en ruso que reúna problemas y ejemplos que ilustren los diferentes principios de la teoría y los métodos de resolución de las ecuaciones integrales.

La presente colección de problemas viene a cubrir, a nuestro juicio, este vacío en cierta medida. En este libro se exponen algunos métodos de resolución de las ecuaciones integrales, problemas sobre la determinación de raíces características y ciertos métodos aproximados. Muchos problemas especiales de las ecuaciones integrales no han sido mencionados, puesto que los autores perseguían un fin puramente didáctico: ilustrar y consolidar los principios fundamentales de la teoría mediante ejemplos.

Nos consideraremos satisfechos, si nuestro libro recibe una acogida favorable por parte de los lectores y si les resulta útil para el estudio de las ecuaciones integrales.

Quedaremos agradecidos por todas las observaciones y sugestiones que tengan como objeto la mejora de este libro.

M. L. Krasnov
A. I. Kiseliov
G. I. Makarenko

OBSERVACIONES PRELIMINARES

1. Conjuntos medibles. Sea E cierto conjunto de puntos del segmento $S=[a, b]$. Denotemos por C_E el conjunto complementario de E con respecto a S, es decir, por definición, C_E consta de los puntos que no pertenecen a E.

Los puntos del conjunto E pueden ser incluidos de diferentes maneras en el sistema de intervalos

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

finito o numerable. Denotemos por $\Sigma\alpha$ la suma de las longitudes de los intervalos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ Para cualquier sistema de intervalos que cubra a E tendremos

$$\Sigma\alpha > 0.$$

El extremo inferior de las $\Sigma\alpha$, que depende sólo del conjunto E, se llama *medida exterior* de E y se designa por m^*E. De la definición de medida exterior se deduce, que para todo $\varepsilon > 0$ existe un sistema tal de intervalos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, que contienen todos los puntos del conjunto E que

$$m^*E \leqslant \Sigma\alpha < m^*E + \varepsilon.$$

Se llama *medida interior* m_*E del conjunto E a la diferencia entre la longitud del segmento S y la medida exterior del conjunto complementario, es decir,

$$m_*E = b - a - m^*C_E.$$

Si las medidas exterior e interior del conjunto E son iguales, éste se llama *medible según Lebesgue* (o simplemente medible) y el valor común de las medidas m^*E y m_*E se llama *medida del conjunto E según Lebesgue* (o simplemente medida de E) y se denota por mE, o bien mes E.

La medida de un intervalo (a, b) es su longitud: mes $(a, b) = b - a$. Un conjunto ω de puntos del intervalo (a, b) se llama *conjunto de medida cero*, si ω se puede cubrir por intervalos cuya suma de las longitudes sea arbitrariamente pequeña.

2. Una función $f(x)$ de variable real, definida en el conjunto medible E, se llama *medible*, si para cualquier número A el conjunto $\mathscr{E}(f(x) > A)$, formado por los puntos x, que pertenecen al conjunto E, para los cuales $f(x) > A$, es medible según Lebesgue.

Observación. La condición para que el conjunto $\mathscr{E}(f(x) > A)$ sea medible puede ser sustituida por una de las tres siguientes:

1) el conjunto $\mathscr{E}(f(x) \geqslant A)$ es medible;
2) el conjunto $\mathscr{E}(f(x) < A)$ es medible;
3) el conjunto $\mathscr{E}(f(x) \leqslant A)$ es medible.

3. Una función $f(x)$, no negativa en intervalo (a, b), se llama *sumable* en dicho intervalo, si $\int_a^b f(x)\,dx$ es finita *).

Una función $f(x)$ de signo arbitrario será sumable en el intervalo (a, b) si, y sólo si, la función $|f(x)|$ es sumable, es decir, si la integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ tiene un valor finito.

En lo sucesivo operaremos con el intervalo fundamental $I=(a, b)$ (o bien $I_0=(0, a)$) y con el cuadrado fundamental $\Omega\{a \leqslant x,\ t \leqslant b\}$ (o bien $\Omega_0\{0 \leqslant x,\ t \leqslant a\}$).

4. Espacio $L_2(a, b)$. Se dice que $f(x)$ es una *función de cuadrado integrable en* $[a, b]$ si la integral

$$\int_a^b f^2(x)\,dx$$

existe (es finita). Denotaremos por $L_2(a, b)$, o simplemente L_2, el conjunto de todas las funciones de cuadrado integrable en $[a, b]$.

Propiedades fundamentales de las funciones de L_2

1°. El producto de dos funciones de cuadrado integrable es una función integrable.

2°. La suma de dos funciones de L_2 pertenece también a L_2.

3°. Si $f(x) \in L_2$ y λ es un número real arbitrario, entonces

$$\lambda f(x) \in L_2.$$

4°. Si $f(x) \in L_2$ y $g(x) \in L_2$, tiene lugar la desigualdad de *Buniakovski-Schwarz*

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx. \qquad (1)$$

Por definición, se llama *producto escalar* de dos funciones $f(x) \in L_2$ y $g(x) \in L_2$ al número

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx. \qquad (2)$$

*) La integral se entiende en el sentido de Lebesgue. Sin embargo, el lector que desconozca dicha integral puede suponer que en todas partes se toma la integral en el sentido de Riemann.

Se llama *norma* de una función $f(x)$ de L_2 al número no negativo

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}. \tag{3}$$

5°. Para $f(x)$ y $g(x)$ de L_2 tiene lugar la desigualdad triangular

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|. \tag{4}$$

6°. Convergencia en media. Supongamos que las funciones $f(x)$ y $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... son de cuadrado sumable en (a, b). Si

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx = 0,$$

entonces se dice que la sucesión de funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... *converge en media* o, más exactamente, en media cuadrática hacia la función $f(x)$.

Si la sucesión $\{f_n(x)\}$ de funciones de L_2 converge uniformemente hacia $f(x)$, entonces $f(x) \in L_2$ y $\{f_n(x)\}$ converge en media hacia $f(x)$.

Se dice que la sucesión $\{f_n(x)\}$ de funciones de L_2 converge *en media en sí misma*, si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal, que

$$\int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2\,dx \leqslant \varepsilon$$

para $n > N$ y $m > N$. A veces, las sucesiones convergentes en sí mismas se llaman *fundamentales*. Para que una sucesión $\{f_n(x)\}$ converja en media hacia cierta función, es necesario y suficiente que dicha sucesión sea fundamental. El espacio L_2 es completo, es decir, toda sucesión fundamental de funciones de L_2 converge hacia una función que también pertenece a L_2.

Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de $L_2(a, b)$ se llaman *equivalentes* en (a, b), si $f(x) \neq g(x)$ únicamente en un conjunto de medida cero. En este caso se dice que $f(x) = g(x)$ casi en todas partes en (a, b).

5. Espacio $C^{(l)}(a, b)$. Los elementos de este espacio son todas las funciones definidas en el segmento $[a, b]$ y que tienen en dicho segmento derivadas continuas de hasta l-ésimo orden inclusive. Las operaciones de la suma y producto de funciones por un número se definen de manera habitual.

La *norma* del elemento $f(x) \in C^{(l)}(a, b)$ se define mediante la fórmula

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{l} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(k)}(x)|,$$

siendo $f^{(0)}(x) = f(x)$.

La convergencia en $C^{(l)}(a, b)$ significa la convergencia uniforme, tanto de la sucesión de las propias funciones, como de las sucesiones de sus derivadas de k-ésimo orden ($k = 1, 2, \ldots, l$).

Los conceptos de conjunto medible, función medible, función sumable, etc. se generalizan al caso de un espacio de mayor dimensión. Así, por ejemplo, la función $F(x, t)$ se llamará de cuadrado sumable en $\Omega\{a \leqslant x,\ t \leqslant b\}$, si la integral

$$\int_a^b \int_a^b F^2(x, t)\,dx\,dt < +\infty.$$

La norma de la función $F(x, t)$ se define en este caso por la igualdad

$$\|F\| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b F^2(x, t)\,dx\,dt}.$$

6. Una función $f(z)$ de variable compleja z, derivable en cada punto de la región G del plano de la variable compleja z, se llama *analítica* (regular) en dicha región.

La función $f(z)$ se denomina *entera*, si es analítica en todo el plano (excluyendo el punto infinito).

La función $f(z)$ se llama *meromorfa* (o quebrada), si puede ser representada en forma de cociente de dos funciones enteras:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \qquad h(z) \neq 0.$$

Una función meromorfa $f(z)$ puede tener sólo un número finito de polos en cualquier región acotada.

El punto $z=a$ se llama punto singular *aislado* de la función $f(z)$, si existe un entorno $0 < |z-a| < \delta$ de este punto, en el cual $f(z)$ es analítica, mientras que en el propio punto $z=a$ no lo es. El punto singular aislado $z=a$ se denomina *polo* de la función $f(z)$, si

$$\lim_{x \to a} f(z) = \infty$$

(se supone que $f(z)$ es uniforme en un entorno del punto $z=a$, $z \neq a$).

Para que el punto $z=a$ sea polo de la función $f(z)$ es necesario y suficiente que dicho punto sea cero de la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$, es decir, que $\varphi(a) = 0$.

Se llama *orden* del polo $z=a$ de la función $f(z)$ el orden del cero $z=a$ de la función

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

7. Se llama *residuo* de la función $f(z)$ en el punto singular aislado $z=a$ al número

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} f(z)\,dz,$$

donde c es la circunferencia $|z-a|=\rho$ de radio suficientemente pequeño.

Si el punto $z=a$ es un polo de n—ésimo orden de la función $f(z)$, entonces

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{(z-a)^n f(z)\right\}.$$

Para un polo simple $(n=1)$ será

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}\left\{(z-a)f(z)\right\}.$$

Si $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, y además $\varphi(a)\neq 0$ y $\psi(z)$ tiene un cero de primer orden en el punto $z=a$, es decir, $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$, entonces

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

8. Lema de Jordan. *Si $f(z)$ es continua en la región $|z|\geqslant R_0$, $Im\ z\geqslant\alpha$ (α es un número real fijo) y $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, entonces para cualquier $\lambda>0$ será*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{c_R} e^{i\lambda z} f(z)\,dz=0,$$

donde c_R es el arco de la circunferencia $|z|=R$ que pertenece a la región considerada.

9. La función $f(x)$ se llama *localmente sumable*, si es sumable en cualquier conjunto acotado.

Supongamos que la función compleja $\varphi(t)$ de variable real t es localmente sumable, igual a cero para $t<0$, y satisface a la condición $|\varphi(t)|<Me^{s_0 t}$ para todas las t ($M>0$, $s_0\geqslant 0$). Tales funciones $\varphi(t)$ las llamaremos *funciones-objeto*. El número s_0 se denomina *indice de crecimiento* de la función $\varphi(t)$.

Llamaremos *transformación de Laplace de la función* $\varphi(t)$ a la función $\Phi(p)$ de variable compleja $p=s+i\sigma$, definida por la igualdad

$$\Phi(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt.$$

Para cualquier objeto $\varphi(t)$, la función $\Phi(p)$ está definida en el semiplano Re $p>s_0$ y es una función analítica en dicho semiplano. El hecho de que $\Phi(p)$ es una transformación de Laplace de la función $\varphi(t)$ se escribirá así:

$$\varphi(t)\doteqdot\Phi(p).$$

10. Teorema de inversión. *Si $\varphi(t)$ es una función-objeto, y $\Phi(p)$ es su imagen, entonces*

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}\,\Phi(p)\,dp,\quad \gamma>s_0, \qquad (*)$$

donde la integral se toma a lo largo de la recta $\operatorname{Re} p = \gamma$, *que es paralela al eje imaginario y se entiende en el sentido de valor principal:*

$$\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} \Phi(p)\, dp = \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} e^{pt} \Phi(p)\, dp.$$

La fórmula (*) se llama *fórmula de inversión* de la transformación de Laplace. Si

$$\Phi(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

donde $M(p)$ y $N(p)$ son polinomios en p, siendo el grado de $M(p)$ menor que el de $N(p)$, la función-objeto para $\Phi(p)$ será

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \to a_k} \frac{d^{n_k - 1}}{dp^{n_k - 1}} \left\{ (p - a_k)^{n_k} \Phi(p) e^{pt} \right\},$$

donde a_k son los polos de $\Phi(p)$, n_k sus órdenes, y la suma se toma por todos los polos de la función $\Phi(p)$.

En el caso en que todos los polos a_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ de la función $\Phi(p) = \dfrac{M(p)}{N(p)}$ sean simples, tendremos

$$\frac{M(p)}{N(p)} \doteqdot \sum_{k=1}^{l} \frac{M(a_k)}{N'(a_k)} e^{a_k t} = \varphi(t).$$

11. Teorema del producto (teorema de la convolución). *Supongamos que las funciones* $f(t)$ *y* $\varphi(t)$ *son funciones-objeto y sean*

$$f(t) \doteqdot F(p),$$
$$\varphi(t) \doteqdot \Phi(p).$$

Entonces

$$F(p) \cdot \Phi(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau)\, \varphi(t - \tau)\, d\tau.$$

La integral del segundo miembro de (5) se llama *convolución* de las funciones $f(t)$ y $\varphi(t)$ y se designa por el símbolo $f(t) * \varphi(t)$.

De este modo, el producto de las imágenes es también una imagen, precisamente, la imagen de la convolución de las funciones-objeto:

$$F(p) \cdot \Phi(p) \doteqdot f(t) * \varphi(t).$$

12. Supongamos que la función $f(x)$ es absolutamente integrable en todo el eje $-\infty < x < +\infty$. La función

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\lambda x}\, dx$$

se llama *transformación de Fourier de la función* $f(x)$.

La fórmula de inversión de la transformación de Fourier tiene la forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Para dar a las fórmulas de transformación directa e inversa de Fourier una mayor simetría, éstas se escriben con frecuencia en la forma

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

CAPITULO I

ECUACIONES INTEGRALES DE VOLTERRA

§ 1. Conceptos fundamentales

La ecuación

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x, t)\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

donde $f(x)$, $K(x, t)$ son funciones conocidas, $\varphi(x)$ es una función incógnita y λ, un parámetro numérico, se llama *ecuación integral lineal de Volterra de segunda especie*. La función $K(x, t)$ se denomina *núcleo de la ecuación* de Volterra. Si $f(x)\equiv 0$, la ecuación (1) toma la forma

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x, t)\varphi(t)\,dt \tag{2}$$

y se llama ecuación *homogénea* de Volterra de segunda especie.

La ecuación

$$\int_a^x K(x, t)\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{3}$$

donde $\varphi(x)$ es la función incógnita, se llama *ecuación integral de Volterra de primera especie*. Sin perder generalidad, se puede suponer que el límite inferior a es igual a cero, cosa que haremos en lo sucesivo.

Se llama *solución* de la ecuación integral (1), (2) ó (3) a la función $\varphi(x)$ que, al ser sustituida en dicha ecuación, la transforma en una identidad (respecto a x).

E j e m p l o. Demostrar que la función $\varphi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ es la solución de la ecuación integral de Volterra

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}\varphi(t)\,dt. \tag{4}$$

R e s o l u c i ó n. Sustituyendo en el segundo miembro de (4) la

función $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$, en lugar de $\varphi(x)$, tendremos

$$\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\,dt=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}=\varphi(x).$$

De este modo, la sustitución de $\varphi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ en ambos miembros de la ecuación (4) transforma a ésta en una identidad respecto a x:

$$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Esto significa, según la definición, que $\varphi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ es la solución de la ecuación integral (4).

Comprobar que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones integrales correspondientes.

1. $\varphi(x)=\frac{x}{(1+x^2)^{5/2}}$;

$$\varphi(x)=\frac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2}-\int_0^x \frac{3x+2x^3-t}{(1+x^2)^2}\varphi(t)\,dt.$$

2. $\varphi(x)=e^x(\cos e^x-e^x \operatorname{sen} e^x)$;

$$\varphi(x)=(1-xe^{2x})\cos 1-e^{2x}\operatorname{sen} 1+\int_0^x [1-(x-t)e^{2x}]\,\varphi(t)\,dt.$$

3. $\varphi(x)=xe^x$; $\varphi(x)=\operatorname{sen} x+2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt$.

4. $\varphi(x)=x-\frac{x^3}{6}$; $\varphi(x)=x-\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt$.

5. $\varphi(x)=1-x$; $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=x$.

6. $\varphi(x)=3$; $x^3=\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt$.

7. $\varphi(x)=\frac{1}{2}$; $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt=\sqrt{x}.$

8. $\varphi(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x}}$; $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt=1.$

Observación. Las ecuaciones integrales de Volterra surgen en los problemas de la física, en los que existe un sentido de preferencia de la variable independiente (por ejemplo, el tiempo, la energía, etc.).

Consideremos un haz de rayos Roentgen que pasa por una sustancia *en dirección del eje OX. Consideraremos que, al dispersarse, el haz* conserva dicha dirección. Tomemos el conjunto de rayos que tienen una longitud de onda dada. Al pasar por una capa de sustancia de un espesor dx, una parte de estos rayos se absorbe, y otra parte cambia su longitud de onda en virtud de la dispersión. Por otro lado, este conjunto se completa a cuenta de los rayos que, teniendo originalmente una energía mayor (es decir, teniendo una longitud de onda λ menor), pierden parte de ésta por la dispersión. De este modo, si la función $f(\lambda, x)\,d\lambda$ da el conjunto de rayos, cuya longitud de onda se halla comprendida en el intervalo desde λ hasta $\lambda+d\lambda$, entonces

$$\frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial x}=-\mu f(\lambda, x)+\int\limits_0^\lambda P(\lambda, \tau) f(\tau, x)\,d\tau,$$

donde μ es el coeficiente de absorción, y $P(\lambda, \tau)\,d\tau$, la probabilidad de que un haz de longitud de onda τ adquiera, al pasar por una capa *de espesor unidad, una longitud de onda comprendida entre* λ *y* $\lambda+d\lambda$.

Hemos obtenido una *ecuación integrodiferencial*, es decir, una ecuación en la cual la función incógnita $f(\lambda, x)$ se encuentra bajo los signos de derivada e integral.

Haciendo

$$f(\lambda, x)=\int\limits_0^\infty e^{-px}\,\psi(\lambda, p)\,dp,$$

donde $\psi(\lambda, p)$ es una nueva función incógnita, se halla que $\psi(\lambda, p)$ satisface a la ecuación integral de Volterra de segunda especie

$$\psi(\lambda, p)=\frac{1}{\mu-p}\int\limits_0^\lambda P(\lambda, \tau)\,\psi(\tau, p)\,d\tau.$$

§ 2. Nexo entre las ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones integrales de Volterra

La resolución de la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n(x)\,y=F(x) \tag{1}$$

con coeficientes continuos $a_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, con las condiciones iniciales

$$y(0)=C_0,\; y'(0)=C_1,\; \ldots,\; y^{(n-1)}(0)=C_{n-1}, \tag{2}$$

puede ser reducida a la resolución de cierta ecuación integral de Volterra de segunda especie.

Demostremos esto en el ejemplo de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)\,y=F(x), \tag{1'}$$

$$y(0)=C_0, \qquad y'(0)=C_1. \tag{2'}$$

Hagamos

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x). \tag{3}$$

De aquí, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales (2'), se halla sucesivamente:

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x \varphi(t)\,dt+C_1, \qquad y=\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt+C_1x+C_0. \tag{4}$$

Aquí hemos aplicado la fórmula

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx\int_{x_0}^x dx\ldots\int_{x_0}^x}_{n} f(x)\,dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x (x-z)^{n-1}f(z)\,dz.$$

Teniendo en cuenta (3) y (4), escribamos la ecuación diferencial (1) así:

$$\varphi(x)+\int_0^x a_1(x)\,\varphi(t)\,dt+C_1a_1(x)+\int_0^x a_2(x)\,(x-t)\,\varphi(t)\,dt+$$
$$+C_1xa_2(x)+C_0a_2(x)=F(x).$$

o bien

$$\varphi(x)+\int_0^x [a_1(x)+a_2(x)(x-t)]\,\varphi(t)\,dt=$$

$$=F(x)-C_1a_1(x)-C_1xa_2(x)-C_0a_2(x). \qquad (5)$$

Haciendo

$$K(x,\ t)=-[a_1(x)+a_2(x)(x-t)], \qquad (6)$$

$$f(x)=F(x)-C_1a_1(x)-C_1xa_2(x)-C_0a_2(x), \qquad (7)$$

reducimos (5) a la forma

$$\varphi(x)=\int_0^x K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt+f(x), \qquad (8)$$

es decir, se llega a una ecuación integral de Volterra de segunda especie.

La existencia de una solución única de la ecuación (8) se sigue de la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy (1')—(2'), para la ecuación diferencial lineal con coeficientes continuos en un entorno del punto $x=0$.

Recíprocamente, resolviendo la ecuación integral (8) con K y f, determinadas mediante las fórmulas (6) y (7), y sustituyendo la expresión obtenida para $\varphi(x)$ en la última de las ecuaciones (4), se obtiene la solución única de la ecuación (1'), que satisface a las condiciones iniciales (2').

E j e m p l o. Formar la ecuación integral que corresponde a la ecuación diferencial

$$y''+xy'+y=0 \qquad (1)$$

y a las condiciones iniciales

$$y(0)=1, \quad y'(0)=0. \qquad (2)$$

R e s o l u c i ó n. Hacemos

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x). \qquad (3)$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x \varphi(t)\,dt+y'(0)=\int_0^x \varphi(t)\,dt,$$

$$y=\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt+1. \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en la ecuación diferencial dada, se halla

$$\varphi(x)+\int_0^x x\varphi(t)\,dt+\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt+1=0,$$

o bien

$$\varphi(x)=-1-\int_0^x (2x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Formar las ecuaciones integrales correspondientes a las ecuaciones diferenciales siguientes con las condiciones iniciales dadas:

9. $y''+y=0;\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$

10. $y'-y=0;\quad y(0)=1.$

11. $y''+y=\cos x;\quad y(0)=y'(0)=0.$

12. $y''-5y'+6y=0;\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$

13. $y''+y=\cos x;\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$

14. $y''-y'\operatorname{sen} x+e^x y=x;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-1.$

15. $y''+(1+x^2)\,y=\cos x;\ y(0)=0,\ y'(0)=2.$

16. $y'''+xy''+(x^3-x)\,y=xe^x+1;$

$y(0)=y'(0)=1,\ y''(0)=0.$

17. $y'''-2xy=0;\ y(0)=\frac{1}{2},\ y'(0)=y''(0)=1.$

18. Demostrar que una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y condiciones iniciales cualesquiera se reduce a una ecuación integral de Volterra de segunda especie, cuyo núcleo depende sólo de la diferencia de los argumentos $(x-t)$ (ecuación integral con ciclo cerrado o ecuación de convolución).

§ 3. Resolvente de la ecuación integral de Volterra. Resolución de una ecuación integral mediante la resolvente

Supongamos que se tiene una ecuación integral de Volterra de segunda especie

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

donde $K(x, t)$ es una función continua para $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant x$, y $f(x)$ es continua para $0 \leqslant x \leqslant a$.

Busquemos la solución de la ecuación integral (1) en forma de serie infinita de potencias de λ:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots \tag{2}$$

Sustituyendo formalmente esta serie en (1), se obtiene

$$\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots =$$
$$= f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\,[\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(t) + \ldots]\,dt. \tag{3}$$

Comparando los coeficientes de iguales potencias de λ, se halla:

$$\varphi_0(x) = f(x),$$
$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x, t)\,\varphi_0(t)\,dt = \int_0^x K(x, t)\,f(t)\,dt, \tag{4}$$
$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x, t)\,\varphi_1(t)\,dt = \int_0^x K(x, t)\int_0^t K(t, t_1)\,f(t_1)\,dt_1 dt$$

. . . .

Las relaciones (4) permiten determinar sucesivamente las funciones $\varphi_n(x)$. Se puede demostrar, que bajo las hipótesis hechas con respecto a $f(x)$ y $K(x, t)$, la serie (2), obtenida de este modo, converge uniformemente respecto a x y a λ para cualquier λ y $x \in [0, a]$, y su suma es la solución única de la ecuación (1).

Además, de (4) se deduce que

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x, t)\,f(t)\,dt, \tag{5}$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x, t)\left[\int_0^t K(t, t_1)\,f(t_1)\,dt_1\right]dt =$$
$$= \int_0^x f(t_1)\,dt_1 \int_{t_1}^x K(x, t)\;K(t, t_1)\;dt = \int_0^x K_2(x, t_1)\,f(t_1)\,dt_1, \tag{6}$$

donde

$$K_2(x, t_1) = \int_{t_1}^x K(x, t)\,K(t, t_1)\;dt. \tag{7}$$

De forma análoga se establece que, en general,

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x, t)\,f(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Las funciones $K_n(x, t)$ se llaman *núcleos repetidos* o *iterados*. Estos, como no es difícil demostrar, se determinan mediante las fórmulas de recurrencia

$$K_1(x, t) = K(x, t),$$

$$K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_n(z, t)\, dz \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Aplicando (8) y (9), la igualdad (2) puede escribirse así:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu \int_0^x K_\nu(x, t) f(t)\, dt. \tag{10}$$

La función $R(x, t; \lambda)$ que se determina por la serie

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu K_{\nu+1}(x, t), \tag{11}$$

se llama *resolvente* (o núcleo resolvente) de la ecuación integral (1). La serie (11) converge en forma absoluta y uniforme, si el núcleo $K(x, t)$ es continuo.

Los núcleos iterados, así como la resolvente, no dependen del límite inferior en la ecuación integral.

La resolvente $R(x, t; \lambda)$ satisface a la siguiente ecuación funcional:

$$R(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda \int_0^x K(x, s) R(s, t; \lambda)\, ds. \tag{12}$$

Aplicando la resolvente, la solución de la ecuación integral (1) se escribe en la forma

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda) f(t)\, dt \tag{13}$$

(vèase [3], [7]).

Ejemplo. Hallar la resolvente de la ecuación integral de Volterra con núcleo $K(x, t) \equiv 1$.

Resolución. Tenemos $K_1(x, t) = K(x, t) = 1$. Ahora, según las fórmulas (9),

$$K_2(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_1(z, t)\,dz = \int_t^x dz = x - t,$$

$$K_3(x, t) = \int_t^x 1\cdot(z-t)\,dz = \frac{(x-t)^2}{2},$$

$$K_4(x, t) = \int_t^x 1\cdot\frac{(z-t)^2}{2}\,dz = \frac{(x-t)^3}{3!},$$

. . . .

$$K_n(x, t) = \int_t^x 1\cdot K_{n-1}(z, t)\,dz = \int_t^x 1\cdot\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}\,dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

De este modo, en virtud de la definición, la resolvente será

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} = e^{\lambda(x-t)}.$$

Hallar las resolventes de las ecuaciones integrales de Volterra con los núcleos siguientes:

19. $K(x, t) = x - t$.

20. $K(x, t) = e^{x-t}$.

21. $K(x, t) = e^{x^2-t^2}$.

22. $K(x, t) = \frac{1+x^2}{1+t^2}$.

23. $K(x, t) = \frac{2+\cos x}{2+\cos t}$.

24. $K(x, t) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}$.

25. $K(x, t) = a^{x-t}$ $(a > 0)$.

Supongamos que el núcleo $K(x, t)$ sea un polinomio de $(n-1)$-ésimo grado con respecto a t de modo que se pueda representar en la forma

$$K(x, t) = a_0(x) + a_1(x)(x-t) + \ldots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}, \qquad (14)$$

siendo los coeficientes $a_k(x)$ continuos en $[0, a]$. Si se determina la

función $g(x, t; \lambda)$ como la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^n g}{dx^n} - \lambda \left[a_0(x) \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + a_1(x) \frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\, g \right] = 0, \quad (15)$$

que satisface a las condiciones

$$g|_{x=t} = \frac{dg}{dx}\Big|_{x=t} = \ldots = \frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}\Big|_{x=t} = 0; \quad \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\Big|_{x=t} = 1, \quad (16)$$

entonces la resolvente $R(x, t; \lambda)$ se determinará por la igualdad

$$R(x, t; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(x, t; \lambda)}{dx^n}. \quad (17)$$

Análogamente, en el caso en que

$$K(x, t) = b_0(t) + b_1(t)(t-x) + \ldots + \frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1}, \quad (18)$$

la resolvente será

$$R(x, t; \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(t, x; \lambda)}{dt^n}, \quad (19)$$

donde $g(x, t; \lambda)$ es la solución de la ecuación

$$\frac{d^n g}{dt^n} + \lambda \left[b_0(t) \frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}(t)\, g \right] = 0, \quad (20)$$

que satisface a las condiciones (16) (véase [3]).

Ejemplo. Hallar la resolvente de la ecuación integral

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Resolución. En nuestro caso $K(x, t) = x - t$; $\lambda = 1$; $n = 2$; por consiguiente, según (14), $a_1(x) = 1$, $a_0(x) = 0$.

En este caso, la ecuación (15) tiene la forma

$$\frac{d^2 g(x, t; 1)}{dx^2} - g(x, t; 1) = 0,$$

de donde

$$g(x, t; 1) = g(x, t) = C_1(t)\, e^x + C_2(t)\, e^{-x}.$$

Las condiciones (16) dan

$$\begin{cases} C_1(t)\, e^t + C_2(t)\, e^{-t} = 0, \\ C_1(t)\, e^t - C_2(t)\, e^{-t} = 1. \end{cases} \quad (21)$$

Resolviendo el sistema (21), se halla

$$C_1(t) = \frac{1}{2} e^{-t}, \quad C_2(t) = -\frac{1}{2} e^t,$$

y, por consiguiente,

$$g(x, t) = \frac{1}{2}(e^{x-t} - e^{-(x-t)}) = \text{sh}(x-t).$$

De acuerdo con la (17),

$$R(x, t; 1) = [\text{sh}(x-t)]''_x = \text{sh}(x-t).$$

Hallar las resolventes de las ecuaciones integrales con los siguientes núcleos ($\lambda = 1$):

26. $K(x, t) = 2 - (x - t)$.

27. $K(x, t) = -2 + 3(x - t)$.

28. $K(x, t) = 2x$.

29. $K(x, t) = -\dfrac{4x-2}{2x+1} + \dfrac{8(x-t)}{2x+1}$.

30. Sea dada una ecuación integral de Volterra cuyo núcleo dependa sólo de la diferencia de sus argumentos:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt \qquad (\lambda = 1). \tag{22}$$

Demostrar que para la ecuación (22) todos los núcleos repetidos y la resolvente dependen también solamente de la diferencia $x - t$.

Supongamos que $f(x)$ y $K(x)$ en la ecuación (22) son funciones-objeto. Apliquemos la transformación de Laplace a ambos miembros de (22); utilizando el teorema sobre el producto (transformación de convolución), se halla

$$\Phi(p) = F(p) + \tilde{K}(p)\Phi(p),$$

donde

$$\varphi(x) \doteqdot \Phi(p),$$
$$f(x) \doteqdot F(p),$$
$$K(x) \doteqdot \tilde{K}(p)$$

De aquí que

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \tilde{K}(p)}, \qquad \tilde{K}(p) \neq 1. \tag{23}$$

Aplicando los resultados del ejercicio 30, podemos escribir la solución de la ecuación integral (22) en la forma

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t)\,dt, \tag{24}$$

donde $R(x-t)$ es la resolvente de la ecuación integral (22).

Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación (24), se halla

$$\Phi(p)=F(p)+\tilde{R}(p)F(p),$$

donde

$$R(x)\doteqdot\tilde{R}(p).$$

De aquí que

$$\tilde{R}(p)=\frac{\Phi(p)-F(p)}{F(p)}. \qquad (25)$$

Sustituyendo en (25) la expresión para $\Phi(p)$ tomada de la (23), se obtiene

$$\tilde{R}(p)=\frac{\tilde{K}(p)}{1-\tilde{K}(p)}. \qquad (26)$$

La función-objeto para $\tilde{R}(p)$ será la resolvente de la ecuación integral (22).

Ejemplo. Hallar la resolvente de la ecuación integral de Volterra con núcleo $K(x, t)=\operatorname{sen}(x-t)$, $\lambda=1$.

Resolución. Tenemos que $\tilde{K}(p)=\frac{1}{p^2+1}$. Según la igualdad (26)

$$\tilde{R}(p)=\frac{\frac{1}{p^2+1}}{1-\frac{1}{p^2+1}}=\frac{1}{p^2}\doteqdot x.$$

Por consiguiente, la resolvente buscada de la ecuación integral es

$$R(x, t; 1)=x-t.$$

Hallar las resolventes de las ecuaciones integrales de Volterra con los núcleos $(\lambda=1)$:

31. $K(x, t)=\operatorname{sh}(x-t)$.

32. $K(x, t)=e^{-(x-t)}$.

33. $K(x, t)=e^{-(x-t)}\operatorname{sen}(x-t)$.

34. $K(x, t)=\operatorname{ch}(x-t)$.

35. $K(x, t)=2\cos(x-t)$.

Ejemplo. Hallar, mediante la resolvente, la solución de la integral

$$\varphi(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)\,dt.$$

Resolución. La resolvente del núcleo $K(x, t) = e^{x^2 - t^2}$ para $\lambda = 1$ es $R(x, t; 1) = e^{x-t} e^{x^2-t^2}$ (véase el № 21). Según la fórmula (13), la solución de la ecuación integral dada es

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x-t} e^{x^2-t^2} e^{t^2} dt = e^{x+x^2}.$$

Aplicando los resultados de los ejercicios anteriores, hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones integrales mediante las resolventes:

36. $\varphi(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} \varphi(t)\, dt.$

37. $\varphi(x) = \operatorname{sen} x + 2 \int_0^x e^{x-t} \varphi(t)\, dt.$

38. $\varphi(x) = x\,3^x - \int_0^x 3^{x-t} \varphi(t)\, dt.$

39. $\varphi(x) = e^x \operatorname{sen} x + \int_0^x \frac{2+\cos x}{2+\cos t} \varphi(t)\, dt.$

40. $\varphi(x) = 1 - 2x - \int_0^x e^{x^2-t^2} \varphi(t)\, dt.$

41. $\varphi(x) = e^{x^2+2x} + 2 \int_0^x e^{x^2-t^2} \varphi(t)\, dt.$

42. $\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} \varphi(t)\, dt.$

43. $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \operatorname{sen}(x-t) \varphi(t)\, dt.$

44. $\varphi(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} + \int_0^x e^{-(x-t)} \varphi(t)\, dt.$

45. $\varphi(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-t)} \operatorname{sen}(x-t) \varphi(t)\, dt.$

Observación 1. La existencia de una solución única de las ecuaciones de Volterra de segunda especie

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

tiene lugar bajo hipótesis mucho más generales con respecto a la función $f(x)$ y al núcleo $K(x,t)$ que la continuidad de éstas.

Teorema. *La ecuación integral de Volterra de segunda especie (1), cuyo núcleo $K(x,t)$ y cuya función $f(x)$ pertenecen a los espacios $L_2(\Omega_0)$ y $L_2(0,a)$, respectivamente, tiene una y sólo una solución del espacio $L_2(0,a)$.*

Ésta solución viene dada por la fórmula

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x R(x,t;\lambda)\,f(t)\,dt, \tag{2}$$

donde la resolvente $R(x,t;\lambda)$ se determina mediante la serie

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^{\nu}K_{\nu+1}(x,t), \tag{3}$$

formada por los núcleos iterados y que converge casi en todas partes.

Observación 2. En los problemas de la unicidad de la solución de una ecuación integral juega un papel esencial la clase de funciones en la cual se busca la solución (la clase de funciones sumables, de cuadrado sumable, continuas, etc.).

Así, si el núcleo $K(x,t)$ de la ecuación de Volterra está acotado, cuando x varía en cierto intervalo finito (a,b), de manera que

$$|K(x,t)|\leqslant M,\qquad M=\text{const},\qquad x\in(a,b),$$

y el término independiente $f(x)$ es sumable en el intervalo (a,b) la ecuación de Volterra tiene una solución única sumable $\varphi(x)$ en el intervalo (a,b) para cualquier valor de λ.

Sin embargo, si prescindimos de la condición de que la solución sea sumable, el teorema de unicidad deja de ser válido, en el sentido de que la ecuación puede tener, además de la solución sumable, soluciones no sumables también.

P. S. Urison construyó ejemplos muy sutiles de ecuaciones integrales (véanse más abajo los ejemplos 1 y 2) que poseen, conjuntamente con las sumables, soluciones no sumables, incluso en el caso en que el núcleo $K(x,t)$ y la función $f(x)$ sean continuos.

Consideraremos, para simplificar, que $f(x)\equiv 0$, y estudiemos la ecuación integral

$$\varphi(x)=\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

donde $K(x,t)$ es una función continua.

La única solución sumable de la ecuación (1) será $\varphi(x)\equiv 0$.

Ejemplo 1. Sea

$$K(x,t)=\begin{cases} te^{\frac{1}{x^2}-1}, & 0\leqslant t\leqslant e^{1-\frac{1}{x^2}} \\ x, & xe^{1-\frac{1}{x^2}}\leqslant t\leqslant x, \\ 0, & t>x. \end{cases} \tag{2}$$

En el cuadrado $\Omega_0\{0\leqslant x,\ t\leqslant 1\}$ el núcleo $K(x,t)$ está acotado, puesto que $0\leqslant K(x,t)\leqslant x\leqslant 1$. Es más, éste es continuo para $0\leqslant t\leqslant x$. La ecuación (1) tiene, en este caso, la solución sumable evidente $\varphi(x)\equiv 0$ y, en virtud de lo expuesto más arriba, dicha ecuación no tiene otras soluciones sumables.

Por otro lado, mediante una comprobación directa se ve que la ecuación (1) tiene un conjunto infinito de soluciones no sumables en (0, 1) del tipo

$$\varphi(x)=\frac{C}{x}$$

(C es una constante arbitraria, $x\neq 0$).

En efecto, teniendo en cuenta la expresión (2) para el núcleo $K(x,t)$, se halla

$$\int_0^x K(x,t)\varphi(t)\,dt=\int_0^{xe^{1-\frac{1}{x^2}}} te^{\frac{1}{x^2}-1}\frac{C}{t}\,dt+$$
$$+\int_{xe^{1-\frac{1}{x^2}}}^{x} x\frac{C}{t}\,dt=Cx+Cx\ln e^{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{C}{x}.$$

De este modo, obtenemos

$$\frac{C}{x}=\frac{C}{x}\qquad (x\neq 0).$$

Esto significa, precisamente, que $\varphi(x)=\frac{C}{x}$ es una solución (no sumable) de la ecuación (1).

Ejemplo 2. Sea $0\leqslant t\leqslant x<a$ ($a>0$ es un número cualquiera, en particular, $a=+\infty$),

$$K(x,t)=\frac{2}{\pi}\frac{xt^2}{x^6+t^2}. \tag{3}$$

La función $K(x,t)$ es incluso holomorfa en todas partes, a excepción del punto (0, 0). Sin embargo, la ecuación (1) con el núcleo (3)

admite soluciones no sumables. En efecto, la ecuación

$$\psi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{xt^2}{x^6+t^2}\,\psi(t)\,dt-\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} \tag{4}$$

tiene una solución sumable, puesto que la función

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}$$

es acotada y continua en todas partes, a excepción del punto $x=0$.

La función

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \psi(x)+\dfrac{1}{x^2}, & x>0,\end{cases} \tag{5}$$

donde $\psi(x)$ es la solución de la ecuación (4), será una solución ya no sumable de la ecuación (1) con núcleo (3).

En efecto, para $x>0$ tenemos que

$$\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{xt^2}{x^6+t^2}\,\psi(t)\,dt+\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{x\,dt}{x^6+t^2}. \tag{6}$$

En virtud de la ecuación (4), el primer sumando del segundo miembro de (6) es

$$\psi(x)+\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}.$$

El segundo sumando da

$$\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{x\,dt}{x^6+t^2}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{t}{x^3}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}=\frac{2}{\pi x^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\qquad(x>0).$$

De este modo,

$$\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=\psi(x)+\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}+\frac{2}{\pi x^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}=\psi(x)+\frac{1}{x^2}=\varphi(x),$$

lo cual significa, precisamente, que la función $\varphi(x)$, determinada mediante la igualdad (5), es una solución no sumable de la ecuación (1) con núcleo (3).

Ejemplo 3. La ecuación

$$\varphi(x)=\int_0^x t^{x-t}\,\varphi(t)\,dt\qquad(0\leqslant x,\ t\leqslant 1)$$

tiene una, y sólo una solución continua $\varphi(x) \equiv 0$. Mediante la sustitución directa se comprueba, que esta ecuación tiene, además, un conjunto infinito de soluciones discontinuas de la forma

$$\varphi(x) = Cx^{\lambda-1},$$

donde C es una constante arbitraria.

§ 4. Método de las aproximaciones sucesivas

Supongamos que se tiene una ecuación integral de Volterra de segunda especie

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{1}$$

Supondremos que $f(x)$ es continua en $[0, a]$, y que el núcleo $K(x, t)$ es continuo para $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant x$.

Tomemos cierta función $\varphi_0(x)$, continua en $[0, a]$. Sustituyendo en el segundo miembro de la ecuación (1) la función $\varphi_0(x)$ en lugar de $\varphi(x)$ se obtiene

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\,\varphi_0(t)\,dt.$$

La función $\varphi_1(x)$ definida de este modo es también continua en el segmento $[0, a]$. Continuando este proceso se obtiene la sucesión de funciones

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots,$$

donde

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\,\varphi_{n-1}(t)\,dt.$$

Según las hipótesis hechas con respecto a $f(x)$ y a $K(x, t)$, la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ converge para $n \to \infty$ hacia la solución $\varphi(x)$ de la ecuación integral (1) (véase [6]).

Si, en particular, se toma $f(x)$ en calidad de $\varphi_0(x)$, entonces $\varphi_n(x)$ serán, precisamente, las sumas parciales de la serie (2) del § 3 que determina la solución de la ecuación integral (1). Una elección acertada de la aproximación "nula" $\varphi_0(x)$ puede conducir a una convergencia rápida de la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ hacia la solución de la ecuación integral.

E j e m p l o. Resolver la ecuación integral

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)\,dt,$$

por el método de las aproximaciones sucesivas, tomando $\varphi_0(x) \equiv 0$.

Resolución. Como $\varphi_0(x)=0$, entonces $\varphi_1(x)=1$. Luego

$$\varphi_2(x)=1+\int_0^x 1\cdot dt=1+x,$$

$$\varphi_3(x)=1+\int_0^x (1+t)\,dt=1+x+\frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_4(x)=1+\int_0^x \left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)dt=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}.$$

Es evidente que

$$\varphi_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

De esta manera, $\varphi_n(x)$ es la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$. De aquí se deduce que $\varphi_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}e^x$. No es difícil comprobar que la función $\varphi(x)=e^x$ es la solución de la ecuación integral dada.

Resolver por el método de las aproximaciones sucesivas las siguientes ecuaciones integrales:

46. $\varphi(x)=x-\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt,\ \ \varphi_0(x)\equiv 0.$

47. $\varphi(x)=1-\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt,\ \ \varphi_0(x)\equiv 0.$

48. $\varphi(x)=1+\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt,\ \ \varphi_0(x)=1.$

49. $\varphi(x)=x+1-\int_0^x \varphi(t)\,dt,$

a) $\varphi_0(x)=1,$ b) $\varphi_0(x)=x+1.$

50. $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}+x-\int_0^x \varphi(t)\,dt,$

a) $\varphi_0(x)=1,$ b) $\varphi_0(x)=x,$ c) $\varphi_0(x)=\frac{x^2}{2}+x.$

51. $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi_0(x) = 1.$

52. $\varphi(x) = 2x + 2 - \int_0^x \varphi(t)\,dt,$

$$\text{a) } \varphi_0(x) = 1, \quad \text{b) } \varphi_0(x) = 2.$$

53. $\varphi(x) = 2x^2 + 2 - \int_0^x x\varphi(t)\,dt,$

$$\text{a) } \varphi_0(x) = 2, \quad \text{b) } \varphi_0(x) = 2x.$$

54. $\varphi(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - \int_0^x \varphi(t)\,dt, \quad \varphi_0(x) = x^2.$

55. Supongamos que $K(x, t)$ satisface a la condición

$$\int_0^a \int_0^x K^2(x, t)\,dt\,dx < +\infty.$$

Demostrar que la ecuación

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt = 0$$

tiene la solución única $\varphi(x) \equiv 0$ para cualquier λ en la clase $L_2(0, a)$.

El método de las aproximaciones sucesivas puede ser aplicado también a la resolución de las ecuaciones integrales no lineales de Volterra de la forma

$$y(x) = y_0 \int_0^x F[t, y(t)]\,dt \tag{2}$$

o más generales

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x F(x, t, \varphi(t))\,dt \tag{3}$$

para hipótesis muy amplias con respecto a las funciones $F(x, t, z)$ y $f(x)$. El problema de la resolución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \qquad y|_{x=0} = y_0$$

se reduce a una ecuación del tipo (2). Al igual que en el caso de las ecuaciones integrales lineales, buscaremos la solución de la ecuación (3) como el límite de la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$, donde, por ejemplo, $\varphi_0(x)=f(x)$, y los elementos siguientes $\varphi_k(x)$ se calculan sucesivamente por la fórmula

$$\varphi_k(x)=f(x)+\int_0^x F(x,\ t,\ \varphi_{k-1}(t))\,dt \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Si $f(x)$ y $F(x,\ t,\ z)$ son de cuadrado sumable y satisfacen a las condiciones

$$|F(x,\ t,\ z_2)-F(x,\ t,\ z_1)|\leqslant a(x,\ t)\,|z_2-z_1|, \tag{5}$$

$$\left|\int_0^x F(x,\ t,\ f(t))\,dt\right|\leqslant n(x), \tag{6}$$

donde las funciones $a(x,\ t)$ y $n(x)$ son tales que en la región fundamental $(0\leqslant t\leqslant x\leqslant a)$

$$\int_0^a n^2(x)\,dx\leqslant N^2,\quad \int_0^a dx\int_0^x a^2(x,\ t)\,dt\leqslant A^2, \tag{7}$$

entonces la ecuación integral no lineal de Volterra de segunda especie (3) tiene una solución única $\varphi(x)\in L_2(0,\ a)$, la cual se define como el límite de $\varphi_n(x)$, cuando $n\to\infty$:

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x),$$

donde las funciones $\varphi_n(x)$ se hallan por las fórmulas de recurrencia (4). Como $\varphi_0(x)$ se puede tomar cualquier función de $L_2(0,\ a)$ (en particular, una función continua) que cumpla la condición (6). Señalemos que una elección acertada de la aproximación nula puede facilitar la resolución de la ecuación integral.

Ejemplo. Resolver la ecuación integral

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{1+\varphi^2(t)}{1+t^2}\,dt,$$

por el método de las aproximaciones sucesivas, tomando como aproximación nula: 1) $\varphi_0(x)=0$; 2) $\varphi_0(x)=x$.

Resolución. 1) Sea $\varphi_0(x)=0$. Entonces

$$\varphi_1(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg} x,$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x \frac{1+\operatorname{arctg}^2 t}{1+t^2}\,dt=\operatorname{arctg} x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x,$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^x \frac{1+\left(\operatorname{arctg} t+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 t\right)^2}{1+t^2}\,dt=\operatorname{arctg} x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x+$$

$$+\frac{2}{3\cdot 5}\operatorname{arctg}^5 x+\frac{1}{7\cdot 9}\operatorname{arctg}^7 x,$$

$$\varphi_4(x)=\int_0^x \frac{1+\varphi_3^2(t)}{1+t^2}\,dt=\operatorname{arctg} x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x+\frac{2}{3\cdot 5}\operatorname{arctg}^5 x+$$

$$+\frac{17}{5\cdot 7\cdot 9}\operatorname{arctg}^7 x+\frac{38}{5\cdot 7\cdot 9^2}\operatorname{arctg}^9 x+\frac{134}{9\cdot 11\cdot 21\cdot 25}\operatorname{arctg}^{11} x+$$

$$+\frac{4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 13}\operatorname{arctg}^{13} x+\frac{1}{7^2\cdot 9^2\cdot 15}\operatorname{arctg}^{15} x,\ \ldots$$

Designando $\operatorname{arctg} x=u$ y comparando las expresiones de $\varphi_n(x)$ con el desarrollo

$$\operatorname{tg} u=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)}{(2\nu)!}B_{2\nu}u^{2\nu-1},$$

$$|u|<\frac{\pi}{2},$$

donde B_ν son los números de Bernoulli *), se advierte que

$$\varphi_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x.$$

No es difícil comprobar que la función $\varphi(x)=x$ es la solución de la ecuación integral dada.

---

*) Los números de Bernoulli $B_{2\nu+1}$ con índices impares son iguales a cero, a excepción de $B_1=-\frac{1}{2}$. El número $B_0=1$; los números $B_{2\nu}$ se determinan por las fórmulas de recurrencia

$$B_{2\nu}=-\frac{1}{2\nu+1}+\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{2\nu-2}\frac{2\nu(2\nu-1)\ldots(2\nu-2k+2)}{k!}B_k.$$

2) Sea $\varphi_0(x)=x$. Entonces

$$\varphi_1(x)=\int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt=x.$$

De forma análoga se halla que $\varphi_n(x)=x$ $(n=2,\ 3,\ \ldots)$.

De este modo, la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ es la sucesión estacionaria $\{x\}$, cuyo límite es $\varphi(x)=x$. La solución de la ecuación integral dada se obtiene de inmediato:

$$\varphi(x)=x.$$

56. Resolver la ecuación integral

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+t+\varphi(t)}\,dt$$

por el método de las aproximaciones sucesivas.

57. Hallar, por el método de las aproximaciones sucesivas, la segunda aproximación $\varphi_2(x)$ de la solución de la ecuación integral

$$\varphi(x)=1+\int_0^x [\varphi^2(t)+t\varphi(t)+t^2]\,dt.$$

58. Hallar, por el método de las aproximaciones sucesivas, la tercera aproximación $\varphi_3(x)$ de la solución de la ecuación integral

$$\varphi(x)=\int_0^x [t\varphi^2(t)-1]\,dt.$$

§ 5. Ecuaciones de convolución

Sean $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ dos funciones continuas, definidas para $x\geqslant 0$. Se llama *convolución* de estas *funciones* a la función $\varphi_3(x)$, que se define por la igualdad

$$\varphi_3(x)=\int_0^x \varphi_1(x-t)\,\varphi_2(t)\,dt. \tag{1}$$

Esta función, definida para $x\geqslant 0$, será también continua. Si $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ son funciones-objeto para la transformación de Laplace, entonces

$$\mathscr{L}\varphi_3=\mathscr{L}\varphi_1\cdot\mathscr{L}\varphi_2. \tag{2}$$

es decir, la imagen de una convolución es igual al producto de las imágenes de las funciones que entran en convolución (teorema del producto).

Consideremos la ecuación integral de Volterra de segunda especie

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \qquad (3)$$

cuyo núcleo depende sólo de la diferencia $x-t$. A la ecuación (3) la llamaremos *ecuación integral de convolución*.

Sean $f(x)$ y $K(x)$ funciones derivables un número suficiente de veces, que para $x \longrightarrow \infty$ crecen en forma no más rápida que la función exponencial, de modo que

$$|f(x)| \leqslant M_1 e^{s_1 x}, \qquad |K(x)| \leqslant M_2 e^{s_2 x}. \qquad (4)$$

Aplicando el método de las aproximaciones sucesivas se puede demostrar que en este caso la función $\varphi(x)$ también satisfará a una acotación del tipo (4):

$$|\varphi(x)| \leqslant M_3 e^{s_3 x}.$$

En consecuencia, se puede hallar la imagen según Laplace de las funciones $f(x)$, $K(x)$ y $\varphi(x)$ (la cual estará definida en el semiplano $\operatorname{Re} p=s>\text{máx}\,(s_1,\ s_2,\ s_3)$).

Sean

$$f(x) \risingdotseq F(p), \quad \varphi(x) \risingdotseq \Phi(p), \qquad K(x) \risingdotseq \tilde{K}(p).$$

Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación (3) y utilizando el teorema del producto, se halla que

$$\Phi(p)=F(p)+\tilde{K}(p)\,\Phi(p). \qquad (5)$$

De aquí que

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-\tilde{K}(p)} \qquad (\tilde{K}(p) \neq 1).$$

La función-objeto $\varphi(x)$ para $\Phi(p)$ será la solución de la ecuación integral (3) (véase [11]).

Ejemplo. Resolver la ecuación integral

$$\varphi(x)=\operatorname{sen} x+2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Resolución. Es sabido que

$$\operatorname{sen} x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}, \quad \cos x \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}.$$

Sea $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación y teniendo en cuenta además el teorema del

producto (de la imagen de una convolución) se obtiene

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{2p}{p^2+1}\,\Phi(p).$$

De aquí que

$$\Phi(p)\left[1-\frac{2p}{p^2+1}\right]=\frac{1}{p^2+1}$$

o bien

$$\Phi(p)=\frac{1}{(p-1)^2}\doteqdot xe^x.$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación integral dada es

$$\varphi(x)=xe^x.$$

Resolver las siguientes ecuaciones integrales:

59. $\varphi(x)=e^x-\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

60. $\varphi(x)=x-\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

61. $\varphi(x)=e^{2x}+\int\limits_0^x e^{t-x}\varphi(t)\,dt.$

62. $\varphi(x)=x-\int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

63. $\varphi(x)=\cos x-\int\limits_0^x (x-t)\cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

64. $\varphi(x)=1+x+\int\limits_0^x e^{-2(x-t)}\varphi(t)\,dt.$

65. $\varphi(x)=x+\int\limits_0^x \operatorname{sen}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

66. $\varphi(x)=\operatorname{sen} x+\int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

67. $\varphi(x)=x-\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

68. $\varphi(x)=1-2x-4x^2+\int\limits_0^x [3+6(x-t)-4(x-t)^2]\varphi(t)\,dt.$

69. $\varphi(x)=\operatorname{sh} x-\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt.$

70. $\varphi(x)=1+2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt.$

71. $\varphi(x)=e^x+2\int\limits_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt.$

72. $\varphi(x)=\cos x+\int\limits_0^x \varphi(t)\,dt.$

La transformación de Laplace puede ser aplicada a la resolución de sistemas de ecuaciones integrales de Volterra del tipo

$$\varphi_i(x)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{s}\int\limits_0^x K_{ij}(x-t)\varphi_j(t)\,dt \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{6}$$

donde $K_{ij}(x)$ y $f_i(x)$ son funciones continuas conocidas que poseen imagen según Laplace.

Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de (6) se obtiene

$$\Phi_i(p)=F_i(p)+\sum_{j=1}^{s}\tilde{K}_{ij}(p)\Phi_j(p) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ s). \tag{7}$$

Este es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con respecto a $\Phi_j(p)$. Resolviéndolo se hallan $\Phi_j(p)$, cuyas funciones-objeto serán, precisamente, la solución del sistema inicial de ecuaciones integrales (6).

E j e m p l o. Resolver el sistema de ecuaciones integrales

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x)&=1-2\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt+\int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt,\\ \varphi_2(x)&=4x-\int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt+4\int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)\,dt.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Resolución. Pasando a las imágenes y aplicando el teorema sobre la imagen de una convolución se obtiene

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p-2}\,\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p}\,\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \dfrac{4}{p^2} - \dfrac{1}{p}\,\Phi_1(p) + \dfrac{4}{p^2}\,\Phi_2(p). \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenido con respecto a $\Phi_1(p)$ y a $\Phi_2(p)$, se halla que

$$\Phi_1(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2},$$

$$\Phi_2(p) = \frac{3p+2}{(p-2)(p+1)^2} = \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

Las funciones-objeto para $\Phi_1(p)$ y $\Phi_2(p)$ son iguales respectivamente a

$$\varphi_1(x) = e^{-x} - xe^{-x},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x}.$$

Las funciones $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ son la solución del sistema inicial de ecuaciones integrales (8).

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones integrales:

73. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = \operatorname{sen} x + \displaystyle\int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \cos x - \displaystyle\int_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

74. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{2x} + \displaystyle\int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

75. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int_0^x \varphi_1(t)\,dt - \int_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x - \int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

76. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x - \int_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{t-x}\varphi_1(t)\,dt + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

77. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x \varphi_1(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

78. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - \int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = \cos x - 1 + \int_0^x \varphi_3(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \cos x + \int_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

79. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + 1 + \int_0^x \varphi_3(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x + \int_0^x (x-t)\varphi_1(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \cos x - 1 - \int_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

§ 6. Resolución de las ecuaciones integrodiferenciales mediante la transformación de Laplace

Se llama *ecuación integrodiferencial lineal* a la ecuación del tipo

$$a_0(x)\varphi^{(n)}(x)+a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\varphi(x)+$$
$$+\sum_{m=0}^{s}\int_0^x K_m(x,t)\varphi^{(m)}(t)\,dt=f(x). \qquad (1)$$

Aqui $a_0(x), \ldots, a_n(x)$, $f(x)$, $K_m(x,t)$ $(m=0, 1, \ldots, s)$ son funciones conocidas, y $\varphi(x)$ es la función incógnita.

Al resolver las ecuaciones integrodiferenciales (1), a diferencia del caso de las ecuaciones integrales, para la función incógnita $\varphi(x)$ se plantean condiciones iniciales del tipo

$$\varphi(0)=\varphi_0, \quad \varphi'(0)=\varphi_0', \ \ldots, \ \varphi^{(n-1)}(0)=\varphi_0^{(n-1)}. \qquad (2)$$

Supongamos que en (1) los coeficientes $a_k(x)=\text{const}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, y que $K_m(x,t)=K_m(x-t)$ $(m=0, 1, \ldots, s)$, es decir, que todas las K_m dependen sólo de la diferencia $x-t$ de los argumentos. Sin detrimento de la generalidad, se puede considerar que $a_0=1$. Entonces la ecuación (1) toma la forma

$$\varphi^{(n)}(x)+a_1\varphi^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n\varphi(x)+$$
$$+\sum_{m=0}^{s}\int_0^x K_m(x-t)\varphi^{(m)}(t)\,dt=f(x) \ (a_1, \ldots, a_n - \text{const}). \qquad (3)$$

Supongamos, además, que las funciones $f(x)$ y $K_m(x)$ son funciones-objeto y que

$$f(x)\risingdotseq F(p), \qquad K_m(x)\risingdotseq \bar{K}_m(p) \qquad (m=0, 1, \ldots, s).$$

Entonces la función $\varphi(x)$ tendrá también su imagen según Laplace

$$\varphi(x)\risingdotseq\Phi(p).$$

Apliquemos a ambos miembros de (3) la transformación de Laplace. En virtud del teorema sobre la imagen de la derivada,

$$\varphi^{(k)}(x)\risingdotseq p^{(k)}\Phi(p)-p^{k-1}\varphi_0-p^{k-2}\varphi_0'-\ldots-\varphi_0^{(k-1)} \qquad (4)$$
$$(k=0, 1, \ldots, n).$$

Según el teorema del producto,

$$\int_0^x K_m(x-t)\varphi^{(m)}(t)\,dt\risingdotseq\bar{K}_m(p)\left[p^m\Phi(p)-p^{m-1}\varphi_0-\ldots-\varphi_0^{(m-1)}\right] \qquad (5)$$
$$(m=0, 1, \ldots, s).$$

Por esto, la ecuación (3) se transforma en la siguiente:

$$\Phi(p)\left[p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n + \sum_{m=0}^{s} \bar{K}(p)\, p^m\right] = A(p), \tag{6}$$

donde A (p) es una función conocida de p.

De la igualdad (6) se halla $\Phi(p)$ que es la solución operacional del problema (3) — (2). Hallando la función-objeto para $\Phi(p)$, se obtiene la solución $\varphi(x)$ de la ecuación integrodiferencial (3), que satisface a las condiciones iniciales (2).

Ejemplo. Resolver la ecuación integrodiferencial

$$\varphi''(x) + \varphi(x) + \int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)\,dt - \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = e^{2x}, \tag{7}$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \tag{8}$$

Resolución. Sea $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. En virtud de (8),

$$\varphi'(x) \risingdotseq p\Phi(p),$$
$$\varphi''(x) \risingdotseq p^2\Phi(p).$$

Por esto, luego de aplicar la transformación de Laplace, la ecuación (7) toma la forma

$$p^2\Phi(p) + \frac{p}{p-2}\Phi(p) = \frac{1}{p-2} \tag{9}$$

o bien

$$\Phi(p)\,\frac{p(p-1)^2}{p-2} = \frac{1}{p-2}. \tag{10}$$

De (10) se halla que

$$\Phi(p) = \frac{1}{p(p-1)^2} \risingdotseq xe^x - e^x + 1.$$

Por consecuencia, la solución $\varphi(x)$ de la ecuación integrodiferencial (7), que satisface a las condiciones iniciales (8), se determina por la igualdad

$$\varphi(x) = xe^x - e^x + 1.$$

Resolver las siguientes ecuaciones integrodiferenciales:

80. $\varphi''(x) + \int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)\,dt = e^{2x};\ \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 1.$

81. $\varphi'(x) - \varphi(x) + \int_0^x (x-t)\,\varphi'(t)\,dt - \int_0^x \varphi(t)\,dt = x;$

$$\varphi(0) = -1.$$

82. $\varphi''(x) - 2\varphi'(x) + \varphi(x) + 2\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi''(t)\,dt +$

$$+ 2\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\,\varphi'(t)\,dt = \cos x;\quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

83. $\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x) - \int_0^x (x-t)\,\varphi''(t)\,dt -$

$$- 2\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\,\varphi'(t)\,dt = \cos x;\quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

84. $\varphi''(x) + \varphi(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt +$

$$+ \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi'(t)\,dt = \operatorname{ch} x;\quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

85. $\varphi''(x) + \varphi(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt +$

$$+ \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi'(t)\,dt = \operatorname{ch} x;\quad \varphi(0) = -1,\quad \varphi'(0) = 1.$$

§ 7. Ecuaciones integrales de Volterra con límites $(x, +\infty)$

Las ecuaciones integrales del tipo

$$\varphi(x) = f(x) + \int_x^{\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

que surgen en varios problemas de la física, pueden ser resueltas también mediante la transformación de Laplace. Para esto, establezcamos el **teorema de la convolución** para las expresiones

$$\int_x^{\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Es conocido que para la transformación de Fourier

$$\mathfrak{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\,\Psi(t)\,dt\right\} = \sqrt{2\pi}\,G(\lambda)\,\Psi(\lambda), \tag{3}$$

donde $G(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ son las transformaciones de Fourier de las funciones $g(x)$ y $\Psi(x)$, respectivamente.

Hagamos $g(x) = K_-(x)$, es decir,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ K(x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \varphi_+(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Entonces (3) toma la forma

$$\mathfrak{F}\left\{ \int_x^{+\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt \right\} = \sqrt{2\pi}\,\tilde{K}_-(\lambda)_{\mathfrak{F}}\,\tilde{\Phi}_+(\lambda)_{\mathfrak{F}}. \tag{5}$$

(aquí y en lo sucesivo, los índices $\mathfrak{F}$ o $\mathscr{L}$ indican que se toma la imagen de la función según Fourier o Laplace, respectivamente).

Para pasar de la transformación de Fourier a la de Laplace, obsérvese que

$$F_{\mathscr{L}}(p) = \sqrt{2\pi}\,[F_+(ip)]_{\mathfrak{F}}. \tag{6}$$

Por consiguiente, de (5) y (6) se halla que

$$\mathscr{L}\left\{ \int_x^{\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt \right\} = \sqrt{2\pi}\,[\tilde{K}_-(ip)]_{\mathfrak{F}}\,[\Phi_+(p)]_{\mathscr{L}}. \tag{7}$$

Expresemos ahora $[\sqrt{2\pi}\,\tilde{K}_-(ip)]_{\mathfrak{F}}$ mediante la transformación de Laplace:

$$[\sqrt{2\pi}\,\tilde{K}_-(ip)]_{\mathfrak{F}} = \int_{-\infty}^{0} K(x)\,e^{-px}\,dx = \int_0^{\infty} K(-x)\,e^{px}\,dx.$$

Haciendo $K(-x) = \mathscr{K}(x)$, se obtiene

$$[\sqrt{2\pi}\,\tilde{K}_-(ip)]_{\mathfrak{F}} = \tilde{\mathscr{K}}_{\mathscr{L}}(-p) = \int_0^{\infty} K(-x)\,e^{px}\,dx.$$

De este modo,

$$\mathscr{L}\left\{ \int_x^{\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt \right\} = \tilde{\mathscr{K}}_{\mathscr{L}}(-p)\,\Phi_{\mathscr{L}}(p). \tag{8}$$

Volvamos a la ecuación integral (1). Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de (1), se obtiene

$$\Phi(p) = F(p) + \tilde{\mathscr{K}}(-p)\,\Phi(p) \tag{9}$$

(el índice $\mathscr{L}$ se ha omitido), o bien

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-\tilde{\mathscr{K}}(-p)} \quad (\tilde{\mathscr{K}}(-p)\neq 1), \tag{10}$$

donde

$$\tilde{\mathscr{K}}(-p)=\int_0^\infty K(-x)\,e^{px}\,dx. \tag{11}$$

La función

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(p)}{1-\tilde{\mathscr{K}}(-p)}\,e^{px}\,dp \tag{12}$$

es una solución particular de la ecuación integral (1). Obsérvese que para que la solución (9) ó (12) tenga sentido es necesario que las regiones en que $\tilde{\mathscr{K}}(-p)$ y $F(p)$ son analiticas, tengan puntos comunes (véase [8]).

Ejemplo. Resolver la ecuación integral

$$\varphi(x)=x+\int_x^\infty e^{2(t-x)}\,\varphi(t)\,dt. \tag{13}$$

Resolución. En el caso dado $f(x)=x$, $K(x)=e^{2x}$. Por esto

$$F(p)=\frac{1}{p^2},\quad \tilde{\mathscr{K}}(-p)=\int_0^\infty e^{-2x}\,e^{px}\,dx=\frac{1}{2-p},\quad \operatorname{Re} p<2.$$

De este modo, obtenemos la siguiente ecuación operacional:

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{2-p}\,\Phi(p),$$

de forma que

$$\Phi(p)=\frac{p-2}{p^2(p-1)}. \tag{14}$$

De aquí se obtiene

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{p-2}{p^2(p-1)}\,e^{px}\,dp \qquad (0<\gamma<2). \tag{15}$$

La integral (15) puede ser calculada por la fórmula integral de Cauchy. La función subintegral tiene un polo doble $p=0$ y uno simple, $p=1$, el cual aparece para $\gamma>1$; esto está ligado con la inclusión o no en la solución de la ecuación (13) de las soluciones de la ecuación homo-

génea correspondiente

$$\varphi(x)=\int_x^{\infty} e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt.$$

Hallemos los residuos de la función subintegral en sus polos:

$$\operatorname*{res}_{p=0}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)}e^{px}\right)=2x+1, \qquad \operatorname*{res}_{p=1}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)}e^{px}\right)=-e^{x}.$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación integral (13) es $\varphi(x)=2x+1+Ce^x$ (C es una constante arbitraria).

Resolver las ecuaciones integrales:

86. $\varphi(x)=e^{-x}+\int_x^{\infty}\varphi(t)\,dt.$

87. $\varphi(x)=e^{-x}+\int_x^{\infty}e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

88. $\varphi(x)=\cos x+\int_x^{\infty}e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

89. $\varphi(x)=1+\int_x^{\infty}e^{\alpha(x-t)}\varphi(t)\,dt \quad (\alpha>0).$

§ 8. Ecuaciones integrales de Volterra de primera especie

Sea dada una ecuación integral de Volterra de primera especie

$$\int_0^x K(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x), \qquad f(0)=0, \tag{1}$$

donde $\varphi(x)$ es la función incógnita.

Supongamos que $K(x,t)$, $\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}$, $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas para $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant t\leqslant x$. Derivando ambos miembros de (1) respecto a x, se obtiene

$$K(x,x)\varphi(x)+\int_0^x\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\varphi(t)\,dt=f'(x). \tag{2}$$

Cualquier solución $\varphi(x)$, continua para $0 \leqslant x \leqslant a$ de la ecuación (1) satisface también, evidentemente, a la ecuación (2). Recíprocamente, cualquier solución continua para $0 \leqslant x \leqslant a$ de la ecuación (2) satisface asimismo a la ecuación (1).

Si $K(x, x)$ no se anula en ningún punto del intervalo fundamental $[0, a]$, la ecuación (2) puede escribirse así:

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)} - \int_0^x \frac{K'_x(x, t)}{K(x, x)} \varphi(t)\, dt, \tag{3}$$

es decir, ésta se reduce a una ecuación integral de Volterra de segunda especie, que ya fue considerada más arriba (véase [9]).

Si $K(x, x) \equiv 0$, a veces resulta útil derivar nuevamente la ecuación (2) con respecto a x, etc.

Observación. Si $K(x, x)$ se anula en cierto punto $x \in [0, a]$, por ejemplo, en el punto $x = 0$, la ecuación (3) adquiere propiedades peculiares, completamente diferentes de las ecuaciones de segunda especie. (Tales ecuaciones fueron llamadas por Picard ecuaciones de tercera especie.) Aquí surgen complicaciones semejantes a las que suelen tener lugar cuando el coeficiente de la derivada de mayor grado se anula en una ecuación diferencial lineal.

Ejemplo. Resolver la ecuación integral

$$\int_0^x \cos(x-t)\, \varphi(t)\, dt = x. \tag{4}$$

Resolución. Las funciones $f(x) = x$, $K(x, t) = \cos(x-t)$ satisfacen a las condiciones de continuidad y derivabilidad formuladas más arriba.

Derivando ambos miembros de (4) con respecto a x, se obtiene

$$\varphi(x) \cos 0 - \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\, \varphi(t)\, dt = 1$$

o bien

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{5}$$

La ecuación (5) es una ecuación integral de segunda especie de tipo convolución.

Aplicando la transformación de Laplace se halla su solución:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2+1} \Phi(p),$$

de donde

$$\Phi(p)=\frac{p^2+1}{p^3}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3}\doteqdot 1+\frac{x^2}{2}.$$

La función $\varphi(x)=1+\frac{x^2}{2}$ será la solución de la ecuación (5) y, por lo tanto, también de la ecuación (4), lo cual puede comprobarse con facilidad por sustitución directa.

Resolver las siguientes ecuaciones integrales de primera especie, reduciéndolas previamente a ecuaciones integrales de segunda especie:

90. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=\operatorname{sen} x.$

91. $\int_0^x 3^{x-t}\varphi(t)\,dt=x.$

92. $\int_0^x a^{x-t}\varphi(t)\,dt=f(x),\ f(0)=0.$

93. $\int_0^x (1-x^2+t^2)\varphi(t)\,dt=\frac{x^2}{2}.$

94. $\int_0^x (2+x^2-t^2)\varphi(t)\,dt=x^2.$

95. $\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\varphi(t)\,dt=e^{x^2/2}-1.$

§ 9. Integrales de Euler

Se llama *función Gamma*, o integral de Euler de segunda especie a la función $\Gamma(x)$, que se define por la igualdad

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt, \tag{1}$$

donde x es un número complejo arbitrario, $\operatorname{Re} x>0$. Para $x=1$ se obtiene

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1. \tag{2}$$

Integrando por partes, de la igualdad (1) hallamos que

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt=\frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{3}$$

Esta igualdad expresa la propiedad fundamental de la función Gamma:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x). \tag{4}$$

Aplicando (2), se obtiene

$$\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1\cdot\Gamma(1)=1,$$
$$\Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2\cdot\Gamma(2)=2!,$$
$$\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3\cdot\Gamma(3)=3!,$$

y, en general, para un valor n entero positivo

$$\Gamma(n)=(n-1)!. \tag{5}$$

Es conocido que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Haciendo $x=t^{1/2}$ en esta igualdad se halla que

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{2}-1}\,dt=\sqrt{\pi}.$$

Teniendo en cuenta la expresión (1) para la función Gamma, la última igualdad se escribe así:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

De aquí y aplicando la propiedad fundamental de la función Gamma, expresada por la igualdad (4), se halla que

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$
$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi}, \text{ etc.}$$

En general, como es fácil comprobar, tiene lugar la igualdad

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \tag{6}$$

(n es un entero positivo).

Conociendo el valor de la función Gamma para cierto valor de argumento, se puede calcular, partiendo de la igualdad (3), el valor de esta función para el argumento disminuido en una unidad. Por

ejemplo:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Por esto

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}. \tag{7}$$

Actuando de forma análoga, se halla:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}, \text{ etc.}$$

No es difícil comprobar que $\Gamma(0)=\Gamma(-1)=\ldots=\Gamma(-n)=\ldots=\infty$. Hemos definido más arriba $\Gamma(x)$ para $\operatorname{Re} x>0$. El método de cálculo de $\Gamma(x)$ que acabamos de indicar permite prolongar esta función al semiplano izquierdo, donde $\Gamma(x)$ está definida en todas partes, a excepción de los puntos $x=-n$ (n es un entero positivo y 0).

Señalemos además las siguientes relaciones:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}, \tag{8}$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2x}\pi^{1/2}\,\Gamma(2x), \tag{9}$$

en general

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-nx}\,\Gamma(nx)$$

(teorema del producto de Gauss y Legendre).

La función Gamma fue definida por Weierstrass mediante la ecuación

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}, \tag{10}$$

donde

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}-\ln m\right)=0{,}57721\ldots$$

es la constante de Euler. De la igualdad (10) se ve que la función $\Gamma(z)$ es analítica en todas partes, salvo en los puntos $z=0$, $z=-1$, $z=-2$, ..., donde tiene polos simples.

Citemos también la fórmula de Euler, que se obtiene de (10):

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right\}. \tag{11}$$

Esta tiene lugar en todas partes, a excepción de los puntos $z=0$, $z=-1$, $z=-2$, ...

96. Demostrar que $\Gamma'(1)=-\gamma$.

97. Demostrar que para $\operatorname{Re} z>0$

$$\Gamma(z)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}dx.$$

98. Demostrar que

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma'(1)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=2\ln 2.$$

99. Demostrar que

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty} z\,\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{(z+1)\ldots(z+n-1)}\,n^{z}.$$

Introduzcamos la integral de Euler de primera especie $B(p,q)$, llamada *función Beta:*

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad (\operatorname{Re} p>0,\ \operatorname{Re} q>0). \tag{12}$$

Tiene lugar la siguiente igualdad, que liga las integrales de Euler de primera y de segunda especie:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{13}$$

100. Demostrar que

$$B(p,q)=B(q,p).$$

101. Demostrar que

$$B(p,q)=B(p+1,q)+B(p,q+1).$$

102. Demostrar que

$$B(p+1,\ q)=\frac{p}{q}B(p,\ q+1).$$

103. Demostrar que

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=2^{p+q-1}B(p,\ q).$$

104. Calcular la integral

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-1}x\cdot\operatorname{sen}^{n-1}x\,dx\ \ (\operatorname{Re}m>0,\ \operatorname{Re}n>0).$$

§ 10. Problema de Abel. Ecuación integral de Abel y sus generalizaciones

Un punto material se mueve bajo la acción de la fuerza de la gravedad en un plano vertical $(\xi,\ \eta)$ por cierta curva. Se pide determinar esta curva de modo que el punto material, que comienza su movimiento sin velocidad inicial en el punto de la curva de

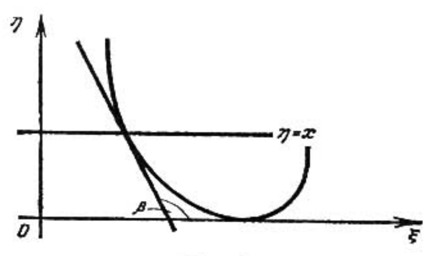


Fig. 1.

ordenada x, alcance el eje ξ al cabo de un tiempo $t=f_1(x)$, donde $f_1(x)$ es una función dada (*fig. 1*).

La magnitud absoluta de la velocidad del punto en movimiento es $v=\sqrt{2g(x-\eta)}$. Denotemos por β el ángulo de inclinación de la tangente respecto al eje ξ. Entonces tendremos

$$\frac{d\eta}{dt}=-\sqrt{2g(x-\eta)}\ \operatorname{sen}\beta.$$

De aquí que

$$dt = -\frac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)}\operatorname{sen}\beta}.$$

Integrando desde 0 hasta x y denotando $\frac{1}{\operatorname{sen}\beta} = \varphi(\eta)$, se obtiene la *ecuación de Abel:*

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{\sqrt{x-\eta}} = -\sqrt{2g}\,f_1(x).$$

Designando $-\sqrt{2g}\,f_1(x)$ por $f(x)$, se obtiene definitivamente

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}\,d\eta = f(x), \tag{1}$$

donde $\varphi(x)$ es la función incógnita, y $f(x)$ es una función dada. Hallando $\varphi(\eta)$ se puede escribir la ecuación de la curva. En efecto,

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta},$$

de donde

$$\eta = \Phi(\beta).$$

Ahora

$$d\xi = \frac{d\eta}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\Phi'(\beta)\,d\beta}{\operatorname{tg}\beta},$$

de donde

$$\xi = \int \frac{\Phi'(\beta)\,d\beta}{\operatorname{tg}\beta} = \Phi_1(\beta),$$

y, por consecuencia, la curva buscada se determina por las ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \Phi_1(\beta), \\ \eta &= \Phi(\beta). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

De este modo, el problema de Abel se reduce a la resolución de una ecuación integral del tipo

$$f(x) = \int_0^x K(x, t)\,\varphi(t)\,dt$$

con el núcleo $K(x, t)$, la función $f(x)$ dados y la función incógnita $\varphi(x)$, es decir, a la resolución de una ecuación integral de Volterra de primera especie.

Se llama también ecuación de Abel a la ecuación un tanto más general:

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}\, dt = f(x), \tag{3}$$

donde α es una constante, $0 < \alpha < 1$ *(ecuación generalizada de Abel)*. Consideraremos que la función $f(x)$ tiene derivada continua en cierto segmento $[0, a]$. Obsérvese que para $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, el núcleo de la ecuación (3) no es de cuadrado integrable, es decir, no es una función de L_2. *Sin embargo, la ecuación (3) tiene solución, la cual puede ser hallada* de la siguiente manera.

Supongamos que existe una solución de la ecuación (3). Sustituyendo en la ecuación x por s, multiplicando ambos miembros de la igualdad obtenida por $\frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$ e integrando respecto a s desde 0 hasta x se obtiene:

$$\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha}\, dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds. \tag{4}$$

Cambiando el orden de integración en el primer miembro, se tiene

$$\int_0^x \varphi(t)\, dt \int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = F(x), \tag{5}$$

donde

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds. \tag{6}$$

Hagamos la sustitución $s = t + y(x-t)$ en la integral interior:

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha (1-y)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \alpha\pi}.$$

Entonces, de la ecuación (5) se obtiene

$$\int_0^x \varphi(t)\, dt = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi} F(x),$$

o bien

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi} \quad F'(x) = \frac{\operatorname{sen} \alpha\pi}{\pi} \left(\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds \right)'_x. \tag{7}$$

De esta manera, la solución única de la ecuación (3) se da por la fórmula (7), la cual, mediante la integración por partes, puede ser escrita también en la forma

$$\varphi(x)=\frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}}+\int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\,ds\right]. \tag{8}$$

Esta solución tiene sentido físico sólo en el caso en que sea no menor que 1 en valor absoluto $\left(\text{puesto que } \varphi(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\right)$.

Demostremos que, en el caso en que $f(x)\equiv C=\text{const}$, la solución del problema de Abel es una cicloide. (Problema de la tautócrona: hallar una curva tal, que una partícula pesada que se deslice sin rozamiento por ella alcance su posición más baja al cabo de un mismo tiempo, independientemente de su posición inicial). En este caso $\alpha=\frac{1}{2}$. Por lo tanto, según la fórmula (8)

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Por esto

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{\pi\sqrt{\eta}}{C},$$

de donde

$$\eta=\frac{C^2}{\pi^2}\operatorname{sen}^2\beta.$$

Ahora

$$d\xi=\frac{d\eta}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{C^2}{\pi^2}\frac{2\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{\operatorname{tg}\beta}d\beta=\frac{C^2}{\pi^2}(1+\cos 2\beta)\,d\beta,$$

$$\xi=\frac{C^2}{\pi^2}\left(\beta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\beta\right)+C_1.$$

Definitivamente:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{C^2}{\pi^2}\left(\beta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\beta\right)+C_1,\\ \eta&=\frac{C^2}{2\pi^2}(1-\cos 2\beta)\end{aligned}\right\}$$

(ecuaciones paramétricas de la cicloide).

105. Demostrar que, en el caso en que $f(x)=C\sqrt{x}$, las soluciones del problema de Abel serán rectas.

Resolver las ecuaciones integrales siguientes:

106. $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} = x^n \quad (0 < \alpha < 1).$

107. $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \operatorname{sen} x.$

108. $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = e^x.$

109. $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = x^{\frac{1}{2}}.$

110. Resolver la ecuación bidimensional de Abel

$$\iint\limits_D \frac{\varphi(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{(y_0-y)^2-(x_0-x)^2}} = f(x_0, y_0).$$

Aquí la región D es un triángulo rectángulo isósceles con hipotenusa en el eje OX y vértice en el punto (x_0, y_0).

Consideremos la ecuación integral (véase [10])

$$\int\limits_0^x (x-t)^{\beta}\,\varphi(t)\,dt = x^{\lambda} \tag{9}$$

($\lambda \geqslant 0$, $\beta > -1$ es real), que es, en cierto sentido, una generalización ulterior de la ecuación de Abel (3).

Multipliquemos ambos miembros de (9) por $(z-x)^{\mu}$ $(\mu > -1)$ e integremos respecto a x desde 0 hasta z:

$$\int\limits_0^z (z-x)^{\mu} \left(\int\limits_0^x (x-t)^{\beta}\,\varphi(t)\,dt \right) dx = \int\limits_0^z x^{\lambda}\,(z-x)^{\mu}\,dx. \tag{10}$$

Haciendo $x = \rho z$ en el segundo miembro de (10), se obtiene

$$\int\limits_0^z x^{\lambda}\,(z-x)^{\mu}\,dx = z^{\lambda+\mu+1} \int\limits_0^1 \rho^{\lambda}\,(1-\rho)^{\mu}\,d\rho = z^{\lambda+\mu+1}\,B(\lambda+1,\ \mu+1) =$$

$$= z^{\lambda+\mu+1} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)} \quad (\lambda+\mu+1 > \lambda \geqslant 0). \tag{11}$$

Cambiando el orden de integración en el primer miembro de (10) se obtiene

$$\int_0^z \left(\int_0^x (z-x)^{\mu} (x-t)^{\beta} \varphi(t)\, dt \right) dx = \int_0^z \left(\int_t^z (z-x)^{\mu} (x-t)^{\beta}\, dx \right) \varphi(t)\, dt. \tag{12}$$

Hagamos en la integral interior del segundo miembro de (12)

$$x = t + \rho (z-t).$$

Entonces

$$\int_t^z (z-x)^{\mu} (x-t)^{\beta}\, dx = (z-t)^{\mu+\beta+1} \int_0^1 \rho^{\beta} (1-\rho)^{\mu}\, d\rho =$$

$$= (z-t)^{\mu+\beta+1} B(\beta+1, \mu+1) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)} (z-t)^{\beta+\mu+1}. \tag{13}$$

Teniendo en cuenta (11), (12), (13), de la igualdad (10) se halla

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)} \int_0^z (z-t)^{\mu+\beta+1} \varphi(t)\, dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)} z^{\lambda+\mu+1}. \tag{14}$$

Escojamos μ de modo que $\mu+\beta+1 = n$ sea un número entero no negativo. Entonces de (14) tendremos

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \int_0^z (z-t)^n \varphi(t)\, dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+n-\beta}$$

o bien

$$\int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!} \varphi(t)\, dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+n-\beta}. \tag{15}$$

Derivando ambos miembros de (15) $n+1$ veces respecto a z, se obtiene

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)(\lambda+n-\beta)(\lambda+n-\beta-1)\ldots(\lambda-\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda-\beta-1} \tag{16}$$

o para $\lambda-\beta+k \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots, n)$

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda-\beta)} z^{\lambda-\beta-1}. \tag{17}$$

Esta es precisamente la solución de la ecuación integral (9).

Obsérvese que, si la magnitud $\lambda-\beta-1$ es igual a un entero negativo, entonces se obtiene $\varphi(z)=0$. En este caso la ecuación (9) no admite solución en la clase de las funciones comunes. Su solución es una función generalizada (véase la pág. 63).

Ejemplo. Resolver la ecuación integral

$$\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = x^2.$$

Resolución. En este caso $\beta=1$, $\lambda=2$. Como $\lambda-\beta+k\neq 0$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, entonces, según la fórmula (17),

$$\varphi(x)=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\,\Gamma(1)}\,x^{2-1-1}=2.$$

Resolver las ecuaciones integrales:

111. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{3}}\,\varphi(t)\,dt = x^{\frac{4}{3}} - x^2.$

112. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}}\,\varphi(t)\,dt = \pi x.$

113. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{4}}\,\varphi(t)\,dt = x + x^2.$

114. $\int_0^x (x-t)^2\,\varphi(t)\,dt = x^3.$

115. $\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\,\varphi(t)\,dt = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$

§ 11. Ecuaciones integrales de Volterra de primera especie de convolución

La ecuación integral de primera especie

$$\int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

cuyo núcleo $K(x,\ t)$ depende sólo de la diferencia $x-t$ de los argumentos, la llamaremos *ecuación integral de primera especie de convolución*.

A esta clase de ecuaciones pertenece, por ejemplo, la ecuación generalizada de Abel.

Consideremos un problema que nos llevará a una ecuación integral de Volterra de convolución.

Una casa de comercio compra y vende distintas mercancías. Se supone que:

1) la compra y la venta son procesos continuos y las mercancías compradas se ponen a la venta de inmediato;

2) la casa adquiere cada nueva remesa de cualquier mercancía en una cantidad que puede ser vendida durante un intervalo de tiempo T, que es el mismo para todas las compras;

3) cada nueva remesa de mercancías se vende uniformemente durante el tiempo T.

La casa comienza la venta de una nueva remesa de mercancías cuyo costo total es igual a la unidad. Se pide hallar la ley $\varphi(t)$, según la cual, la casa debe efectuar las compras de modo que el costo de las mercancías que hay en existencia se mantenga constante.

Resolución. Supongamos que el costo de las mercancías iniciales, que quedan en el momento t, es igual a $K(t)$, donde

$$K(t)=\begin{cases} 1-\dfrac{t}{T}, & t\leqslant T, \\ 0, & t>T. \end{cases}$$

Supongamos que en el intervalo de tiempo entre τ y $\tau+d\tau$ se compran mercancías por la suma de $\varphi(\tau)\,d\tau$. Esta reserva disminuye a causa de la venta, de modo que el costo del resto en el momento $t>\tau$ es igual a $K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$. Por esto, el costo de la parte de las mercancías no vendidas, adquiridas mediante las compras, en cualquier momento t será igual a

$$\int_0^t K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

De este modo, $\varphi(t)$ debe satisfacer a la ecuación integral

$$1-K(t)=\int_0^t K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Hemos obtenido una ecuación integral de Volterra de primera especie de convolución.

Supongamos que $f(x)$ y $K(x)$ son funciones-objeto, y sean

$$f(x)\doteqdot F(p), \qquad K(x)\doteqdot \tilde{K}(p), \qquad \varphi(x)\doteqdot \Phi(p).$$

Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación (1) y utilizando el teorema de la convolución tendremos

$$\tilde{K}(p)\cdot\Phi(p)=F(p), \tag{2}$$

de donde

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{\tilde{K}(p)} \qquad (\tilde{K}(p)\neq 0). \tag{3}$$

La función-objeto $\varphi(x)$ para la función $\Phi(p)$, determinada por la igualdad (3), será la solución de la ecuación integral (1).

Ejemplo. Resolver la ecuación integral

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x. \tag{4}$$

Resolución. Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de (4) se obtiene:

$$\frac{1}{p-1}\Phi(p)=\frac{1}{p^2}, \tag{5}$$

de donde

$$\Phi(p)=\frac{p-1}{p^2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\doteqdot 1-x.$$

La función $\varphi(x)=1-x$ es la solución de la ecuación (4).

Resolver las ecuaciones integrales:

116. $\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt=\operatorname{sen} x.$

117. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=\operatorname{sh} x.$

118. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}}\varphi(t)\,dt=x^{\frac{5}{2}}.$

119. $\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt=\operatorname{sen} x.$

120. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=x^2.$

121. $\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt=x\operatorname{sen} x.$

122. $\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt=x^3e^{-x}.$

123. $\int_0^x J_0(x-t)\varphi(t)\,dt=\operatorname{sen} x.$

124. $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\varphi(t)\,dt=x.$

125. $\int_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x + x^2.$

126. $\int_0^x (x^2-t^2)\,\varphi(t)\,dt = \frac{x^3}{3}.$

127. $\int_0^x (x^2-4xt+3t^2)\,\varphi(t)\,dt = \frac{x^4}{12}.$

128. $\frac{1}{2}\int_0^x (x^2-4xt+3t^2)\,\varphi(t)\,dt = x^2 J_4(2\sqrt{x}).$

129. $\int_0^x (x-2t)\,\varphi(t)\,dt = -\frac{x^3}{6}.$

Observación. Si $K(x, x) = K(0) \neq 0$, la ecuación (1) tiene con seguridad, solución. En el problema 122 el núcleo $K(x, t)$ es idénticamente nulo para $t=x$, pero, de todos los modos, existe solución de esta ecuación.

Como fue indicado ya más arriba, la condición necesaria de existencia de una solución continua de una ecuación integral del tipo

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad (6)$$

consiste en que la función $f(x)$ tenga derivadas continuas hasta de n-ésimo grado inclusive, y que todas sus $n-1$ primeras derivadas se anulen para $x=0$.

Esta ecuación "modelo" (6) indica que es necesaria una concordancia de los órdenes de anulación del núcleo para $t=x$ y del segundo miembro $f(x)$ para $x=0$ (el del segundo miembro debe ser superior por lo menos en 1).

Consideremos la ecuación integral

$$\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = x. \qquad (7)$$

Aquí $f(x)=x$, $n=2$. Es evidente que $f(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes, pero su derivada primera $f'(x)=1 \neq 0$, es decir, la condición necesaria no se cumple.

Aplicando formalmente a ambos miembros de la ecuación (7) la transformación de Laplace, se obtiene

$$\frac{1}{p^2}\,\Phi(p) = \frac{1}{p^2},$$

de donde

$$\Phi(p)=1.$$

Esta es la imagen de la función $\delta(x)$.

Recuérdese que

$$\delta(x) \doteqdot 1,$$
$$\delta^{(m)}(x) \doteqdot p^m;$$

m es un entero $\geqslant 0$.

De este modo, la solución de la ecuación integral (7) es la función δ:

$$\varphi(x)=\delta(x).$$

Esto puede comprobarse por verificación directa, si se tiene en cuenta que la convolución de la función δ con cualquier función $g(x)$, derivable un número suficiente de veces, se define así:

$$g(x) * \delta(x)=g(x),$$
$$\delta^{(k)}(x) * g(x)=g^{(k)}(x) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

En efecto, en nuestro caso $g(x)=K(x)=x$, y

$$\int_0^x K(x-t)\,\delta(t)\,dt=K(x)=x.$$

De este modo, la solución de la ecuación (7) existe, pero ya en la clase de funciones generalizadas.

Resolver las ecuaciones integrales:

130. $\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt=x^2+x-1.$

131. $\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt=\operatorname{sen} x.$

132. $\int_0^x (x-t)^2\,\varphi(t)\,dt=x^2+x^3.$

133. $\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\,\varphi(t)\,dt=x+1.$

134. $\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\,\varphi(t)\,dt=1-\cos x.$

Las ecuaciones integrales de primera especie con núcleo logarítmico

$$\int_0^x \varphi(t) \ln(x-t)\, dt = f(x), \qquad f(0)=0, \tag{8}$$

también pueden ser resueltas mediante la transformación de Laplace.

Es sabido que

$$x^\nu \doteqdot \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}} \qquad (\mathrm{Re}\ \nu > -1). \tag{9}$$

Derivemos la fórmula (9) con respecto a ν:

$$x^\nu \ln x \doteqdot \frac{1}{p^{\nu+1}} \frac{d\Gamma(\nu+1)}{d\nu} + \frac{1}{p^{\nu+1}} \ln\frac{1}{p} \cdot \Gamma(\nu+1),$$

o bien

$$x^\nu \ln x \doteqdot \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}} \left[\frac{\frac{d\Gamma(\nu+1)}{d\nu}}{\Gamma(\nu+1)} + \ln\frac{1}{p} \right]. \tag{10}$$

Para $\nu=0$ se tiene (véase la pág. 51)

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma, \text{ que es la constante de Euler,}$$

y la fórmula (10) toma la forma

$$\ln x \doteqdot \frac{1}{p}(-\gamma - \ln p) = -\frac{\ln p + \gamma}{p}. \tag{11}$$

Sean $\varphi(x) \doteqdot \Phi(p)$, $f(x) \doteqdot F(p)$. Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de (8) y utilizando la fórmula (11) se obtiene

$$-\Phi(p) \frac{\ln p + \gamma}{p} = F(p),$$

de donde

$$\Phi(p) = -\frac{pF(p)}{\ln p + \gamma}. \tag{12}$$

Escribamos $\Phi(p)$ en la forma

$$\Phi(p) = -\frac{p^2F(p) - f'(0)}{p(\ln p + \gamma)} - \frac{f'(0)}{p(\ln p + \gamma)}. \tag{13}$$

Como $f(0)=0$, se tiene

$$p^2F(p) - f'(0) \doteqdot f''(x). \tag{14}$$

Volvamos a la fórmula (9), escribiéndola en la forma

$$\frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \doteqdot \frac{1}{p^{\nu+1}}. \tag{9'}$$

Integrando ambos miembros de (9′) respecto a ν, desde 0 hasta ∞, se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu \doteqdot \int_0^\infty \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \frac{1}{p\ln p}.$$

Según el teorema de semejanza,

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu a^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu \doteqdot \frac{1}{p\ln(ap)} = \frac{1}{p(\ln p+\ln a)}.$$

Si hacemos $a=e^\gamma$, se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu \doteqdot \frac{1}{p(\ln p+\gamma)}. \qquad (15)$$

Apliquemos la igualdad (13). En virtud de (15)

$$\frac{f'(0)}{p(\ln p+\gamma)} \doteqdot f'(0)\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu.$$

Teniendo en cuenta (14) y (15), el primer sumando del segundo miembro de (13) se puede considerar como el producto de dos imágenes. Para hallar su función-objeto utilicemos el teorema sobre la convolución:

$$\frac{p^2F(p)-f'(0)}{p(\ln p+\gamma)} \doteqdot \int_0^x f''(t)\left(\int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu e^{-\gamma\nu}}{(\nu+1)}\,d\nu\right)dt.$$

De este modo, la solucion $\varphi(x)$ de la ecuación integral (8) tendrá la forma

$$\varphi(x) = -\int_0^x f''(t)\left(\int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu\right)dt - f'(0)\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\gamma+1)}\,d\nu$$

(γ es la constante de Euler).

En particular, para $f(x)=x$ se obtiene

$$\varphi(x) = -\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\,d\nu.$$

El teorema sobre la convolución puede ser aplicado también a la resolución de ecuaciones integrales no lineales de Volterra de la forma

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x \varphi(t)\,\varphi(x-t)\,dt. \qquad (16)$$

Sean

$$\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p), \qquad f(x) \risingdotseq F(p).$$

Entonces, en virtud de la ecuación (16),

$$\Phi(p) = F(p) + \lambda\Phi^2(p),$$

de donde

$$\Phi(p) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\lambda F(p)}}{2\lambda}.$$

La función-objeto para $\Phi(p)$, si ésta existe, será la solución de la ecuación integral (16).

Ejemplo. Resolver la ecuación integral

$$\int_0^x \varphi(t)\,\varphi(x-t)\,dt = \frac{x^3}{6}. \tag{17}$$

Resolución. Sea $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. Aplicando a ambos miembros de (17) la transformación de Laplace se obtiene

$$\Phi^2(p) = \frac{1}{p^4},$$

de donde

$$\Phi(p) = \pm\frac{1}{p^2}.$$

Las funciones $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = -x$ serán soluciones de la ecuación (17) (la solución de la ecuación (17) no es única).

Resolver las ecuaciones integrales siguientes:

135. $2\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)\,\varphi(x-t)\,dt = \operatorname{sen} x.$

136. $\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \varphi(t)\,\varphi(x-t)\,dt - \frac{1}{2}\operatorname{sh} x.$

CAPITULO II

ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM

§ 12. Ecuaciones de Fredholm de segunda especie. Conceptos fundamentales

Se llama *ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie* a una ecuación del tipo

$$\varphi(x)-\lambda \int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{1}$$

donde $\varphi(x)$ es la función incógnita; $K(x,\ t)$ y $f(x)$ son funciones conocidas; x y t son variables reales, que varían en el intervalo $(a,\ b)$; λ es un factor numérico.

La función $K(x,\ t)$ se denomina *núcleo de la ecuación integral* (1); se supone que el núcleo $K(x,\ t)$ está definido en el cuadrado $\Omega\,\{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$ en el plano $(x,\ t)$ y es continuo en Ω, o bien sus discontinuidades son tales, que la integral doble

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,\ t)|^2\,dx\,dt$$

tiene un valor finito.

Si $f(x) \not\equiv 0$, la ecuación (1) se llama *no homogénea*; si, en cambio, $f(x) \equiv 0$, la ecuación (1) toma la forma

$$\varphi(x)-\lambda \int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=0 \tag{2}$$

y se denomina *homogénea*.

Los límites de integración a y b en las ecuaciones (1) y (2) pueden ser finitos o infinitos.

Se llama *solución* de las ecuaciones integrales (1) y (2) a cualquier función $\varphi(x)$ que, al ser sustituida en dichas ecuaciones, las reduce a identidades con respecto a $x \in (a,\ b)$.

Ejemplo. Demostrar que la función $\varphi(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$ es la solución de la ecuación integral de Fredholm

$$\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=\frac{x}{2},$$

cuyo núcleo tiene la forma

$$K(x, t)=\begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Resolución. Escribamos el primer miembro de la ecuación en la forma

$$\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt+\int_x^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt\right\}=$$

$$\varphi=(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x \frac{t(2-x)}{2}\varphi(t)\,dt+\int_x^1 \frac{x(2-t)}{2}\varphi(t)\,dt\right\}=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{2-x}{2}\int_0^x t\varphi(t)\,dt+\frac{x}{2}\int_x^1 (2-t)\varphi(t)\,dt\right\}.$$

Sustituyendo la función sen $\frac{\pi x}{2}$ en lugar de $\varphi(x)$ en la expresión obtenida, tendremos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\int_0^x t\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}}{2}\,dt+x\int_x^1 (2-t)\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}}{2}\,dt\right\}=$$

$$=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\left(-\frac{t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{2}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}+\right.$$

$$\left.+x\left[-\frac{2-t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}-\frac{2}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}\right]\Bigg|_{t=x}^{t=1}\right\}=\frac{x}{2}.$$

De este modo se obtiene $\frac{x}{2}\equiv\frac{x}{2}$, lo que significa, según la definición, que $\varphi(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$ es solución de la ecuación integral dada.

Verificar cuáles de las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones integrales indicadas.

137. $\varphi(x)=1,\quad \varphi(x)+\int_0^1 x(e^{xt}-1)\varphi(t)\,dt=e^x-x.$

138. $\varphi(x)=e^x\left(2x-\frac{2}{3}\right)$,

$$\varphi(x)+2\int_0^1 e^{x-t}\varphi(t)\,dt=2xe^x.$$

139. $\varphi(x)=1-\frac{2\operatorname{sen}x}{1-\frac{\pi}{2}}$, $\varphi(x)-\int_0^{\pi}\cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt=1.$

140. $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $\varphi(x)-\int_0^1 K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=\frac{x}{15}(4x^{3/2}-7)$,

$$K(x,\ t)=\begin{cases}\frac{x(2-t)}{2}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \frac{t(2-x)}{2}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

141. $\varphi(x)=e^x$, $\varphi(x)+\lambda\int_0^1 \operatorname{sen}xt\,\varphi(t)\,dt=1.$

142. $\varphi(x)=\cos x$, $\varphi(x)-\int_0^{\pi}(x^2+t)\cos t\,\varphi(t)\,dt=\operatorname{sen}x.$

143. $\varphi(x)=xe^{-x}$, $\varphi(x)-4\int_0^{\infty}e^{-(x+t)}\varphi(t)\,dt=(x-1)\,e^{-x}.$

144. $\varphi(x)=\cos 2x$, $\varphi(x)-3\int_0^{\pi}K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=\cos x$,

$$K(x,\ t)=\begin{cases}\operatorname{sen}x\cos t, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \operatorname{sen}t\cos x, & t\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}$$

145. $\varphi(x)=\frac{4C}{\pi}\operatorname{sen}x$, donde C es una constante arbitraria,

$$\varphi(x)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\operatorname{sen}x\,\frac{\operatorname{sen}^3 t}{t}\,\varphi(t)\,dt=0.$$

§ 13. Método de los determinantes de Fredholm

La solución de la ecuación de Fredholm de segunda especie

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{1}$$

viene dada por la fórmula

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x, t; \lambda)\,f(t)\,dt, \tag{2}$$

donde la función $R(x, t; \lambda)$, llamada *resolvente de Fredholm* de la ecuación (1), se define por la igualdad

$$R(x, t; \lambda)=\frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}, \tag{3}$$

con la condición de que $D(\lambda)\neq 0$. Aquí $D(x, t; \lambda)$ y $D(\lambda)$ son series de potencias de λ:

$$D(x, t; \lambda)=K(x, t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x, t)\,\lambda^n, \tag{4}$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C_n\lambda^n, \tag{5}$$

cuyos coeficientes se determinan por las fórmulas

$$B_n(x, t)=\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} K(x, t) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n)\\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n)\\ K(t_2, t) & K(t_2, t_1) & \dots & K(t_2, t_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ K(t_n, t) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n)\end{vmatrix}dt_1\dots dt_n, \tag{6}$$

siendo

$$B_0(x, t)=K(x, t);$$

$$C_n=\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_n)\\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \dots & K(t_2, t_n)\\ K(t_3, t_1) & K(t_3, t_2) & \dots & K(t_3, t_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \dots & K(t_n, t_n)\end{vmatrix}dt_1\dots dt_n. \tag{7}$$

La función $D(x, t; \lambda)$ se llama *menor de Fredholm*, y $D(\lambda)$, *determinante de Fredholm*. En el caso en que el núcleo $K(x, t)$ sea

acotado o que la integral

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt$$

tenga un valor finito, las series (4) y (5) serán convergentes para todo valor de λ y, por lo tanto, serán funciones analíticas enteras de λ.

La resolvente

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

es una función analítica de λ, a excepción de los valores de λ que anulan la función $D(\lambda)$. Los últimos son polos de la resolvente $R(x, t; \lambda)$.

E j e m p l o. Hallar, mediante los determinantes de Fredholm, la resolvente del núcleo $K(x, t) = xe^t$; $a = 0$, $b = 1$.

R e s o l u c i ó n. Tenemos $B_0(x, t) = xe^t$. A continuación

$$B_1(x, t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0,$$

$$B_2(x, t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 = 0,$$

puesto que los determinantes bajo el signo integral son iguales a cero. Es evidente que también todas las ulteriores $B_n(x, t) = 0$. Hallemos los coeficientes C_n:

$$C_1 = \int_0^1 K(t_1, t_1)\, dt_1 = \int_0^1 t_1e^{t_1}\, dt_1 = 1,$$

$$C_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 = 0.$$

Es evidente también que todos los siguientes $C_n = 0$.

Según las fórmulas (4) y (5), en nuestro caso tenemos

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) = xe^t; \quad D(\lambda) = 1 - \lambda.$$

De este modo,

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^t}{1 - \lambda}.$$

Apliquemos el resultado obtenido a la resolución de la ecuación integral

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 xe^t\varphi(t)\,dt=f(x)\qquad(\lambda\neq 1).$$

Según la fórmula (2)

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1\frac{xe^t}{1-\lambda}f(t)\,dt.$$

En particular, para $f(x)=e^{-x}$ se obtiene

$$\varphi(x)=e^{-x}+\frac{\lambda}{1-\lambda}x.$$

Hallar, aplicando los determinantes de Fredholm, las resolventes de los siguientes núcleos:

146. $K(x, t)=2x-t;\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$

147. $K(x, t)=x^2t-xt^2;\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$

148. $K(x, t)=\operatorname{sen} x\cos t;\qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi,\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

149. $K(x, t)=\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} t;\qquad 0\leqslant x\leqslant 2\pi,\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

El cálculo de los coeficientes $B_n(x, t)$ y C_n de las series (4) y (5) por las fórmulas (6) y (7) es prácticamente posible sólo en casos muy raros, pero de estas fórmulas se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia:

$$B_n(x, t)=C_nK(x, t)-n\int_a^b K(x, s)\,B_{n-1}(s, t)\,ds, \tag{8}$$

$$C_n=\int_a^b B_{n-1}(s, s)\,ds. \tag{9}$$

Sabiendo que los coeficientes $C_0=1$ y $B_0(x, t)=K(x, t)$, por las fórmulas (9) y (8) se hallan sucesivamente C_1, $B_1(x, t)$, C_2, $B_2(x, t)$, C_3, etc.

Ejemplo. Hallar, aplicando las fórmulas (8) y (9), la resolvente del núcleo $K(x, t)=x-2t$, donde $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

Resolución. Tenemos $C_0=1$, $B_0(x, t)=x-2t$. Aplicando la fórmula (9) se halla

$$C_1=\int_0^1(-s)\,ds=-\frac{1}{2}.$$

Por la fórmula (8) se obtiene

$$B_1(x,\ t) = -\frac{x-2t}{2} - \int_0^1 (x-2s)(s-2t)\,ds = -x - t + 2xt + \frac{2}{3}.$$

Ahora tendremos

$$C_2 = \int_0^1 \left(-2s + 2s^2 + \frac{2}{3}\right) ds = \frac{1}{3},$$

$$B_2(x,\ t) = \frac{x-2t}{3} - 2\int_0^1 (x-2s)\left(-s - t + 2st + \frac{2}{3}\right) ds = 0,$$

$$C_3 = C_4 = \ldots = 0, \quad B_3(x,\ t) = B_4(x,\ t) = \ldots = 0.$$

Por consiguiente

$$D(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}; \qquad D(x,\ t;\ \lambda) = x - 2t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda.$$

La resolvente del núcleo dado será

$$R(x,\ t;\ \lambda) = \frac{x - 2t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda}{1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}}.$$

Aplicando las fórmulas de recurrencias (8) y (9), hallar las resolventes de los núcleos siguientes:

150. $K(x,\ t) = x + t + 1;\quad -1 \leqslant x \leqslant 1,\quad -1 \leqslant t \leqslant 1.$

151. $K(x,\ t) = 1 + 3xt;\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

152. $K(x,\ t) = 4xt - x^2;\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

153. $K(x,\ t) = e^{x-t};\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

154. $K(x,\ t) = \operatorname{sen}(x+t);\quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

155. $K(x,\ t) = x - \operatorname{sh} t;\quad -1 \leqslant x \leqslant 1,\quad -1 \leqslant t \leqslant 1.$

Aplicando la resolvente, resolver las siguientes ecuaciones integrales:

156. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x+t)\,\varphi(t)\,dt = 1.$

157. $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2x - t)\,\varphi(t)\,dt = \frac{x}{6}.$

158. $\varphi(x) - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \cos t \varphi(t)\,dt = \cos 2x.$

159. $\varphi(x) + \int_0^1 e^{x-t} \varphi(t)\,dt = e^x.$

160. $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (4xt - x^2) \varphi(t)\,dt = x.$

§ 14. Núcleos iterados. Construcción de la resolvente mediante los núcleos iterados

Sea dada la ecuación integral de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t)\,dt = f(x). \tag{1}$$

Como en el caso de las ecuaciones de Volterra, la ecuación integral (1) puede resolverse por el método de las aproximaciones sucesivas. Para esto, hagamos

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \lambda^n, \tag{2}$$

donde $\psi_n(x)$ se determinan mediante las fórmulas

$$\psi_1(x) = \int_a^b K(x, t) f(t)\,dt,$$

$$\psi_2(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_1(t)\,dt = \int_a^b K_2(x, t) f(t)\,dt,$$

$$\psi_3(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_2(t)\,dt = \int_a^b K_3(x, t) f(t)\,dt, \quad \text{etc.}$$

Aquí

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_1(z, t)\,dz,$$

$$K_3(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_2(z, t)\,dz,$$

y, en general

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, t)\, dz, \tag{3}$$

$n = 2, 3, \ldots$, siendo $K_1(x, t) \equiv K(x, t)$. Las funciones $K_n(x, t)$, que se determinan mediante las fórmulas (3), se llaman *núcleos iterados*. Para éstas es válida la fórmula

$$K_n(x, t) = \int_a^b K_m(x, s) K_{n-m}(s, t)\, ds, \tag{4}$$

donde m es un número natural cualquiera, menor que n.

La resolvente de la ecuación integral (1) se determina a partir de los núcleos iterados por la fórmula

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1}. \tag{5}$$

La serie del segundo miembro se llama *serie de Neumann del núcleo* $K(x, t)$. Esta converge para

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \tag{6}$$

donde

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt}.$$

La solución de la ecución de Fredholm de segunda especie (1) se expresa por la fórmula

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t)\, dt. \tag{7}$$

La cota (6) es esencial para la convergencia de la serie (5). Sin embargo, la solución de la ecuación (1) puede existir también para valores $|\lambda| > \frac{1}{B}$.

Veamos un e j e m p l o:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(t)\, dt = 1. \tag{8}$$

Aquí $K(x, t) \equiv 1$ y, por lo tanto,

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, t)\, dx\, dt = \int_0^1 \int_0^1 dx\, dt = 1.$$

De este modo, la condición (6) da que la serie (5) converja para $|\lambda| < 1$.

Resolviendo la ecuación (8) como ecuación con núcleo degenerado, se obtiene $(1-\lambda)C=1$, donde $C=\int_0^1 \varphi(t)\,dt$. Esta ecuación no es resoluble para $\lambda=1$, lo que significa que para $\lambda=1$ la ecuación integral (8) no tiene solución. De aquí se deduce que en un círculo de radio mayor que la unidad las aproximaciones sucesivas para la ecuación (8) no pueden converger. Sin embargo, para $|\lambda|>1$, la ecuación (8) es resoluble. En efecto, si $\lambda\neq 1$, la función $\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda}$ es solución de la ecuación dada, lo cual es fácilmente comprobable por verificación directa.

Para ciertas ecuaciones de Fredholm, la serie de Neumann (5) para la resolvente converge para valores cualesquiera de λ. Demostremos esto.

Sean dados dos núcleos: $K(x, t)$ y $L(x, t)$. Los llamaremos *ortogonales*, si se cumplen las dos condiciones:

$$\int_a^b K(x, z)\,L(z, t)\,dz=0, \quad \int_a^b L(x, z)\,K(z, t)\,dz=0 \tag{9}$$

para cualesquiera valores admisibles de x y de t.

E j e m p l o. Los núcleos $K(x, t)=xt$ y $L(x, t)=x^2t^2$ son ortogonales en $[-1, 1]$.

En efecto,

$$\int_{-1}^{1} (xz)(z^2t^2)\,dz=xt^2\int_{-1}^{1} z^3\,dz=0,$$

$$\int_{-1}^{1} (x^2z^2)(zt)\,dz=x^2t\int_{-1}^{1} z^3\,dz=0.$$

Existen núcleos que son ortogonales a sí mismos. Para tales núcleos $K_2(x, t)\equiv 0$, donde $K_2(x, t)$ es el segundo núcleo iterado. En este caso, evidentemente, todos los núcleos iterados subsiguientes son también iguales a cero, y la resolvente coincide con el núcleo $K(x, t)$.

E j e m p l o. $K(x, t)=\operatorname{sen}(x-2t)$; $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Tenemos

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x-2z)\operatorname{sen}(z-2t)\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(x+2t-3z)-\cos(x-2t-$$

$$-z)]\,dz=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\operatorname{sen}(x+2t-3z)+\operatorname{sen}(x-2t-z)\right]\Bigg|_{z=0}^{z=2\pi}=0.$$

De este modo, en este caso la resolvente del núcleo es igual al propio núcleo:

$$R(x, t; \lambda)\equiv\operatorname{sen}(x-2t).$$

de manera que la serie de Neumann (5) está formada por un solo término y, evidentemente, converge para cualquier λ.

Los núcleos iterados $K_n(x, t)$ pueden expresarse directamente mediante el núcleo dado $K(x, t)$ por la fórmula

$$K_n(x, t)=\int_a^b\int_a^b \dots \int_a^b K(x, s_1) K(s_1, s_2)\dots K(s_{n-1}, t)\times \\ \times ds_1\, ds_2, \dots ds_{n-1}. \quad (10)$$

Todos los núcleos iterados $K_n(x, t)$, a partir de $K_2(x, t)$, serán funciones continuas en el cuadrado $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$, si el núcleo inicial $K(x, t)$ es de cuadrado sumable en dicho cuadrado.

Si el núcleo dado $K(x, t)$ es simétrico, todos los núcleos iterados $K_n(x, t)$ son también simétricos (véase [7]).

Citemos ejemplos de determinación de los núcleos iterados.

Ejemplo 1. Hallar los núcleos iterados para $K(x, t)=x-t$, si $a=0$, $b=1$.

Resolución. Aplicando las fórmulas (2) se halla sucesivamente:

$$K_1(x, t)=x-t,$$

$$K_2(x, t)=\int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds=\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3},$$

$$K_3(x, t)=\int_0^1 (x-s)\left(\frac{s+t}{2}-st-\frac{1}{3}\right)ds=-\frac{x-t}{12},$$

$$K_4(x, t)=-\frac{1}{12}\int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds=-\frac{1}{12}K_2(x, t)= \\ =-\frac{1}{12}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right).$$

$$K_5(x, t)=-\frac{1}{12}\int_0^1 (x-s)\left(\frac{s+t}{2}-st-\frac{1}{3}\right)ds= \\ =-\frac{1}{12}K_3(x, t)=\frac{x-t}{12^2},$$

$$K_6(x, t)=\frac{1}{12^2}\int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds=\frac{K_2(x, t)}{12^2}= \\ =\frac{1}{12^2}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right).$$

De aquí se deduce que los núcleos iterados tienen la forma:
1) para $n=2k-1$

$$K_{2k-1}(x, t)=\frac{(-1)^k}{12^{k-1}}(x-t),$$

2) para $n=2k$

$$K_{2k}(x, t)=\frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right),$$

donde $k=1, 2, 3, \ldots$

Ejemplo 2. Hallar los núcleos iterados $K_1(x, t)$ y $K_2(x, t)$, si $K(x, t)=e^{\min(x, t)}$, $a=0$, $b=1$.

Resolución. Por definición, tenemos

$$\min(x, t)=\begin{cases} x, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t, & \text{si } t \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

por esto, el núcleo dado se puede escribir en la forma

$$K(x, t)=\begin{cases} e^x, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant t, \\ e^t, & \text{si } t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Este núcleo, como es fácil comprobar, es simétrico, es decir

$$K(x, t)=K(t, x).$$

Se tiene $K_1(x, t)=K(x, t)$. Hallamos el segundo núcleo iterado:

$$K_2(x, t)=\int_0^1 K(x, s) K_1(s, t)\, ds=\int_0^1 K(x, s) K(s, t) ds.$$

Aquí

$$K(x, s)=\begin{cases} e^x, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant s, \\ e^s, & \text{si } s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$K(s, t)=\begin{cases} e^s, & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant t, \\ e^t, & \text{si } t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Como el núcleo dado $K(x, t)$ es simétrico, es suficiente hallar $K_2(x,t)$ solamente para $x > t$.

Tenemos (véase la *fig. 2*)

$$K_2(x, t)=\int_0^t K(x, s) K(s, t)\, ds+\int_t^x K(x, s) K(s, t)\, ds+$$
$$+\int_x^1 K(x, s) K(s, t)\, ds.$$

En el intervalo $(0, t)$ se tiene $s < t < x$, por lo cual

$$\int_0^t K(x, s) K(s, t)\, ds=\int_0^t e^s e^s\, ds=\int_0^t e^{2s}\, ds=\frac{e^{2t}-1}{2}.$$

En el intervalo (t, x) tenemos $t < s < x$, por esto

$$\int_t^x K(x, s) K(s, t)\, ds=\int_t^x e^s e^t\, ds=e^{x+t}-e^{2t}.$$

En el intervalo $(x, 1)$ se tiene $s > x > t$, por lo que

$$\int_x^1 K(x, s) K(s, t)\,ds = \int_x^1 e^x e^t\,ds = (1-x)\,e^{x+t}.$$

Sumando las integrales halladas se obtiene

$$K_2(x, t) = (2-x)\,e^{x+t} - \frac{1+e^{2t}}{2} \qquad (x > t).$$

La expresión para $K_2(x, t)$ para $x < t$ se halla si se cambian de

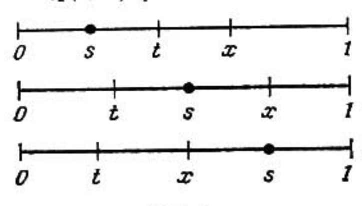


Fig. 2.

lugar los argumentos x y t en la expresión de $K_2(x, t)$ para $x > t$:

$$K_2(x, t) = (2-t)\,e^{x+t} - \frac{1+e^{2x}}{2} \qquad (x < t).$$

De esta manera, el segundo núcleo iterado tiene la forma

$$K_2(x, t) = \begin{cases} (2-t)\,e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2x}}{2}, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (2-x)\,e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2t}}{2}, & \text{si } t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Observación. Si el núcleo $K(x, t)$, dado en el cuadrado $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ por diferentes expresiones analíticas, no es simétrico, entonces, hay que considerar por separado el caso $x < t$. Para $x < t$ tendremos (véase la *fig. 3*)

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, s) K(s, t)\,ds = \int_a^x + \int_x^t + \int_t^b.$$

Ejemplo 3. Hallar los núcleos iterados $K_1(x, t)$ y $K_2(x, t)$, si $a=0$, $b=1$ y

$$K(x, t) = \begin{cases} x+t, & \text{si } 0 \leqslant x < t, \\ x-t, & \text{si } t < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Resolución. Tenemos que $K_1(x, t) = K(x, t)$,

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K(s, t)\, ds,$$

donde

$$K(x, s) = \begin{cases} x+s, & 0 \leqslant x < s, \\ x-s, & s < x \leqslant 1, \end{cases} \quad K(s, t) = \begin{cases} s+t, & 0 \leqslant s < t, \\ s-t, & t < s \leqslant 1. \end{cases}$$

Como el núcleo dado $K(x, t)$ no es simétrico, al hallar $K_2(x, t)$ consideraremos dos casos: 1) $x < t$, y 2) $x > t$.

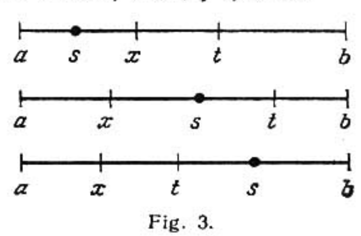


Fig. 3.

1) Sea $x < t$. Entonces (véase la *fig. 3*)

$$K_2(x, t) = I_1 + I_2 + I_3,$$

donde

$$I_1 = \int_0^x (x-s)(s+t)\, ds = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 t}{2},$$

$$I_2 = \int_x^t (x+s)(s+t)\, ds = \frac{5t^3}{6} - \frac{5x^3}{6} + \frac{3}{2} xt^2 - \frac{3}{2} x^2 t,$$

$$I_3 = \int_t^1 (x+s)(s-t)\, ds = \frac{t^3}{6} + \frac{xt^2}{2} - xt + \frac{x}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{3}.$$

Sumando estas integrales, se obtiene

$$K_2(x, t) = t^3 - \frac{2}{3} x^3 - x^2 t + 2xt^2 - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3} \quad (x < t).$$

2) Sea $x > t$. Entonces (véase la *fig 2*)

$$K_2(x, t) = I_1 + I_2 + I_3,$$

donde

$$I_1=\int_0^t (x-s)(s+t)ds=\frac{3}{2}xt^2-\frac{5t^3}{6},$$

$$I_2=\int_t^x (x-s)(s-t)\,ds=\frac{x^3}{6}-\frac{t^3}{6}-\frac{x^2t}{2}+\frac{xt^2}{2},$$

$$I_3=\int_x^1 (x+s)(s-t)\,ds=-\frac{5}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2t+\frac{x-t}{2}-xt+\frac{1}{3}$$

Sumando estas integrales, obtenemos

$$K_2(x,\ t)=-\frac{2}{3}x^3-t^3+x^2t+2xt^2-xt+\frac{x-t}{2}+\frac{1}{3}\quad (x>t).$$

De este modo, el segundo núcleo iterado tiene la forma

$$K_2(x,\ t)=\begin{cases}-\frac{2}{3}x^3+t^3-x^2t+2xt^2-xt+\frac{x-t}{2}+\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<t,\\ -\frac{2}{3}x^3-t^3+x^2t+2xt^2-xt+\frac{x-t}{2}+\frac{1}{3}, & t<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Análogamente se hallan los núcleos iterados restantes $K_n(x,\ t)$ $(n=3,\ 4,\ \ldots)$.

Hallar los núcleos iterados de los núcleos indicados a continuación para las a y b dadas.

161. $K(x,\ t)=x-t;\ a=-1,\ b=1.$

162. $K(x,\ t)=\operatorname{sen}(x-t);\ a=0,\ b=\frac{\pi}{2}\ (n=2,3).$

163. $K(x,\ t)=(x-t)^2;\ a=-1,\ b=1\ (n=2,\ 3).$

164. $K(x,\ t)=x+\operatorname{sen} t;\ a=-\pi,\ b=\pi.$

165. $K(x,\ t)=xe^t;\ a=0,\ b=1.$

166. $K(x,\ t)=e^x\cos t;\ a=0,\ b=\pi.$

En los problemas siguientes, hallar $K_2(x,\ t)$:

167. $K(x,\ t)=e^{|x-t|};\ a=0,\ b=1.$

168. $K(x,\ t)=e^{|x|+t};\ a=-1,\ b=1.$

Citemos un ejemplo de construcción de la resolvente de una ecuación integral mediante los núcleos iterados.

Consideremos la ecuación integral

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 xt\,\varphi(t)\,dt=f(x). \qquad (11)$$

Aquí $K(x, t)=xt$; $a=0$, $b=1$. Sucesivamente se halla:
$K_1(x, t)=xt$,

$$K_2(x, t)=\int_0^1 (xz)(zt)\,dz=\frac{xt}{3},$$

$$K_3(x, t)=\frac{1}{3}\int_0^1 (xz)(zt)\,dz=\frac{xt}{3^2},$$

. . . .

$$K_n(x, t)=\frac{xt}{3^{n-1}}.$$

Según la fórmula (5)

$$R(x, t; \lambda)=\sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t)\,\lambda^{n-1}=xt\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1}=\frac{3xt}{3-\lambda},$$

donde $|\lambda|<3$.

En virtud de la fórmula (7), la solución de la ecuación integral (11) se escribe en la forma

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda}\,f(t)\,dt.$$

En particular, para $f(x)=x$ se obtiene

$$\varphi(x)=\frac{3x}{3-\lambda},$$

donde $\lambda\neq 3$.

Construir las resolventes de los siguientes núcleos:

169. $K(x, t)=e^{x+t}$; $a=0$, $b=1$.

170. $K(x, t)=\operatorname{sen} x\cos t$; $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$.

171. $K(x, t)=xe^{t}$; $a=-1$, $b=1$.

172. $K(x, t)=(1+x)(1-t)$; $a=-1$, $b=0$.

173. $K(x, t)=x^2t^2$; $a=-1$, $b=1$.

174. $K(x, t)=xt$; $a=-1$, $b=1$.

Si $M(x, t)$ y $N(x, t)$ son dos núcleos ortogonales, la resolvente $R(x, t; \lambda)$, que corresponde al núcleo $K(x, t) = M + N$, es igual a la suma de las resolventes $R_1(x, t; \lambda)$ y $R_2(x, t; \lambda)$, que corresponden a cada núcleo.

Ejemplo. Hallar la resolvente del núcleo

$$K(x, t) = xt + x^2t^2, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Resolución. Como ha sido demostrado anteriormente, los núcleos $M(x, t) = xt$ y $N(x, t) = x^2t^2$ son ortogonales en $[-1, 1]$ (véase la pág. 76). Por esto, la resolvente del núcleo $K(x, t)$ es igual a la suma de las resolventes de los núcleos $M(x, t)$ y $N(x, t)$. Aplicando los resultados de los problemas 173 y 174 se halla

$$R_K(x, t; \lambda) = R_M(x, t; \lambda) + R_N(x, t; \lambda) = \frac{3xt}{3-2\lambda} + \frac{5x^2t^2}{5-2\lambda},$$

donde $|\lambda| < \frac{3}{2}$.

Hallar las resolventes de los núcleos:

175. $K(x, t) = \operatorname{sen} x \cos t + \cos 2x \operatorname{sen} 2t; \; a = 0, \; b = 2\pi.$

176. $K(x, t) = 1 + (2x-1)(2t-1); \; a = 0, \; b = 1.$

La propiedad que acabamos de indicar se puede generalizar a cualquier número finito de núcleos.

Si los núcleos $M^{(1)}(x, t), M^{(2)}(x, t), \ldots, M^{(n)}(x, t)$ son ortogonales dos a dos, la resolvente que corresponde a su suma

$$K(x, t) = \sum_{m=1}^{n} M^{(m)}(x, t),$$

es igual a la suma de las resolventes correspondientes a cada sumando.

Llamemos n-ésima *traza* del núcleo $K(x, t)$ a la magnitud

$$A_n = \int_a^b K_n(x, x)\, dx, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

donde $K_n(x, t)$ es el n-ésimo núcleo iterado para el núcleo $K(x, t)$.

Para el determinante $D(\lambda)$ de Fredholm, tiene lugar la siguiente fórmula:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^{n-1}. \tag{13}$$

El radio de convergencia de la serie de potencias (13) es igual al menor módulo de las raíces características.

177. Demostrar que para la ecuación de Volterra

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^x K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(x),$$

el determinante de Fredholm $D(\lambda)=e^{-A_1\lambda}$ y, por consecuencia, la resolvente para una ecuación de Volterra es una función analítica entera de λ.

178. Sea $R(x,\ t;\ \lambda)$ la resolvente de cierto núcleo $K(x,\ t)$.

Demostrar que la resolvente de la ecuación

$$\varphi(x)-\mu\int_a^b R(x,\ t;\ \lambda)\,\varphi(t)\,dt=f(x)$$

es igual a $R(x,\ t;\ \lambda+\mu)$.

179. Sean

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,\ t)\,dx\,dt=B^2,$$

$$\int_a^b\int_a^b K_n^2(x,\ t)\,dx\,dt=B_n^2,$$

donde $K_n(x,\ t)$ es el n-ésimo núcleo iterado para el núcleo $K(x,\ t)$. Demostrar que, si $B_2=B^2$, entonces para cualquier n será $B_n=B^n$.

§ 15. Ecuaciones integrales con núcleo degenerado. Ecuación de Hammerstein

El núcleo $K(x,\ t)$ de la ecuación integral de Fredholm de segunda especie se llama *degenerado*, si éste es la suma de un número finito de productos de una función sólo de x por una función sólo de t, es decir, si tiene la forma

$$K(x,\ t)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,b_k(t); \qquad (1)$$

las funciones $a_k(x)$ y $b_k(t)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ se considerarán continuas en el cuadrado fundamental $a\leqslant x,\ t\leqslant b$ y linealmente indepen-

dientes. La ecuación integral con núcleo degenerado (1)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t) \right] \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{2}$$

se resuelve del siguiente modo.

Escribamos (2) en la forma

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(t) \varphi(t)\, dt \tag{3}$$

e introduzcamos las notaciones

$$\int_a^b b_k(t) \varphi(t)\, dt = C_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Entonces (3) toma la forma

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x). \tag{5}$$

donde C_k son constantes desconocidas (puesto que la función $\varphi(x)$ no es conocida).

De este modo, la resolución de una ecuación integral con núcleo degenerado se reduce a hallar las constantes C_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Sustituyendo la expresión (5) en la ecuación integral (2), después de sencillas transformaciones, se obtiene:

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{ C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right] dt \right\} a_m(x) = 0.$$

En virtud de la independencia lineal de las funciones $a_m(x)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$; de aquí se deduce que

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right] dt = 0$$

o bien

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b a_k(t) b_m(t)\, dt = \int_a^b b_m(t) f(t)\, dt \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Introduciendo, para simplificar la escritura, las notaciones

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t) b_m(t)\, dt, \quad f_m = \int_a^b b_m(t) f(t)\, dt,$$

se obtiene que

$$C_m-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{km}C_k=f_m \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

o, en forma desarrollada:

$$\left.\begin{array}{l}(1-\lambda a_{11})\,C_1-\lambda a_{12}C_2-\ldots-\lambda a_{1n}C_n=f_1,\\ -\lambda a_{21}C_1+(1-\lambda a_{22})\,C_2-\ldots-\lambda a_{2n}C_n=f_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -\lambda a_{n1}C_1-\lambda a_{n2}C_2-\ldots+(1-\lambda a_{nn})\,C_n=f_n.\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Para hallar las incógnitas C_k tenemos un sistema lineal de n ecuaciones algebraicas con n incógnitas. El determinante de este sistema es igual a

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n}\\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1-\lambda a_{nn}\end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Si $\Delta(\lambda)\neq 0$, el sistema (6) tiene una solución única $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$, que se obtiene por las fórmulas de Cramer

$$C_k=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix}1-\lambda a_{11} & \ldots & -\lambda a_{1k-1}f_1-\lambda a_{1k+1} & \ldots & -\lambda a_{1n}\\ -\lambda a_{21} & \ldots & -\lambda a_{2k-1}f_2-\lambda a_{2k+1} & \ldots & -\lambda a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\lambda a_{n1} & \ldots & -\lambda a_{nk-1}f_n-\lambda a_{nk+1} & \ldots & 1-\lambda a_{nn}\end{vmatrix} \qquad (8)$$

$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

La solución de la ecuación integral (2) será la función $\varphi(x)$, determinada por la igualdad

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k a_k(x),$$

donde los coeficientes C_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ se determinan por las fórmulas (8).

Observación. El sistema (6) se puede obtener, si ambos miembros de la igualdad (5) se multiplican sucesivamente por $a_1(x)$, $a_2(x),\ \ldots,\ a_n(x)$ y se integra desde a hasta b, o bien, si se sustituye la expresión (5) para $\varphi(x)$ en la igualdad (4), cambiando x por t.

Ejemplo. Resolver la ecuación integral

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos t+t^2\operatorname{sen}x+\cos x\operatorname{sen}t)\,\varphi(t)\,dt=x. \qquad (9)$$

Resolución. Escribamos la ecuación en la siguiente forma:

$$\varphi(x)=\lambda x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos t\,dt+\lambda \operatorname{sen} x\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)\,dt+$$
$$+\lambda\cos x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\operatorname{sen} t\,dt+x.$$

Introduzcamos las notaciones:

$$C_1=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos t\,dt;\quad C_2=\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)\,dt;\quad C_3=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\operatorname{sen} t\,dt,\quad (10)$$

donde C_1, C_2, C_3 son constantes desconocidas. Entonces la ecuación (9) toma la forma

$$\varphi(x)=C_1\lambda x+C_2\lambda\operatorname{sen} x+C_3\lambda\cos x+x.\quad (11)$$

Sustituyendo la expresión (11) en las igualdades (10), se obtiene

$$C_1=\int_{-\pi}^{\pi}(C_1\lambda t+C_2\lambda\operatorname{sen} t+C_3\lambda\cos t+t)\cos t\,dt,$$
$$C_2=\int_{-\pi}^{\pi}(C_1\lambda t+C_2\lambda\operatorname{sen} t+C_3\lambda\cos t+t)\,t^2\,dt,$$
$$C_3=\int_{-\pi}^{\pi}(C_1\lambda t+C_2\lambda\operatorname{sen} t+C_3\lambda\cos t+t)\operatorname{sen} t\,dt$$

o bien

$$C_1\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t\,dt\right)-C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} t\cos t\,dt-C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\,dt=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t\,dt$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^3\,dt+C_2\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^2\operatorname{sen} t\,dt\right)-C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^2\cos t\,dt=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}t^3\,dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t\operatorname{sen} t\,dt-C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2 t\,dt+C_3\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\operatorname{sen} t\,dt\right)=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}t\operatorname{sen} t\,dt.$$

Calculando las integrales que figuran en estas ecuaciones, se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas para hallar las incógnitas C_1, C_2, C_3:

$$\left.\begin{aligned} C_1-\lambda\pi C_3&=0,\\ C_2+4\lambda\pi C_3&=0,\\ -2\lambda\pi C_1-\lambda\pi C_2+C_3&=2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

El determinante de este sistema es

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda\\ 0 & 1 & 4\pi\lambda\\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix}=1+2\lambda^2\pi^2\neq 0.$$

El sistema (12) tiene solución única:

$$C_1=\frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2};\qquad C_2=-\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2};\qquad C_3=\frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}.$$

Sustituyendo los valores hallados de C_1, C_2 y C_3 en (11) se obtiene la solución de la ecuación integral dada:

$$\varphi(x)=\frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x-4\lambda\pi\operatorname{sen}x+\cos x)+x.$$

Resolver las siguientes ecuaciones integrales con núcleos degenerados:

180. $\varphi(x)-4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2 x\,\varphi(t)\,dt=2x-\pi.$

181. $\varphi(x)-\int\limits_{-1}^{1}e^{\operatorname{arc\,sen}x}\varphi(t)\,dt=\operatorname{tg}x.$

182. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}t\,\varphi(t)\,dt=\operatorname{ctg}x.$

183. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1\cos(q\ln t)\,\varphi(t)\,dt=1.$

184. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1\arccos t\,\varphi(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

185. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{t}\right)^p\varphi(t)\,dt=1\quad(p>-1).$

186. $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 (x\ln t - t\ln x)\varphi(t)\,dt=\frac{6}{5}(1-4x).$

187. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\cos t\,\varphi(t)\,dt=\operatorname{sen} x.$

188. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi} |\pi-t|\operatorname{sen} x\,\varphi(t)\,dt=x.$

189. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x-t)\,\varphi(t)\,dt=\cos x.$

190. $\varphi(x)-$

$-\lambda\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} x\cos t-\operatorname{sen} 2x\cos 2t+\operatorname{sen} 3x\cos 3t)\,\varphi(t)\,dt=\cos x.$

191. $\varphi(x)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[x-\frac{1}{2}(3t^2-1)+\frac{1}{2}t(3x^2-1)\right]\times$

$\times\varphi(t)\,dt=1.$

Muchos problemas de la física se reducen a ecuaciones integrales no lineales de Hammerstein (véase [12]).

La forma canónica de la *ecuación de Hammerstein* es:

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,t)\,f(t,\varphi(t))\,dt, \tag{1}$$

donde $K(x,t)$, $f(t,u)$ son funciones dadas; $\varphi(x)$ es la función incógnita.

A ecuaciones del tipo (1) se reducen con facilidad las ecuaciones

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,t)\,f(t,\varphi(t))\,dt+\psi(x), \tag{1'}$$

donde $\psi(x)$ es una función conocida, de modo que la diferencia entre las ecuaciones homogéneas y no homogéneas, de importancia en el caso lineal, en el caso no lineal no tiene casi ningún valor. La función $K(x,t)$ la llamaremos *núcleo de la ecuación* (1).

Sea $K(x,t)$ un núcleo degenerado, es decir,

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{m} a_i(x)\,b_i(t). \tag{2}$$

En este caso, la ecuación (1) toma la forma

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m} a_i(x)\int_a^b b_i(t)\, f(t, \varphi(t))\, dt. \tag{3}$$

Hagamos

$$C_i=\int_a^b b_i(t)\, f(t, \varphi(t))\, dt \qquad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{4}$$

donde C_i son constantes desconocidas por ahora. Entonces en virtud de (3), tendremos

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i a_i(x). \tag{5}$$

Sustituyendo en las igualdades (4) la expresión (5) para $\varphi(x)$, se obtienen m ecuaciones (en general, trascendentes), que contienen m magnitudes desconocidas $C_1, C_2, \ldots, C_m$:

$$C_i=\psi_i(C_1, C_2, \ldots, C_m) \qquad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

En el caso en que $f(t, u)$ sea un polinomio con respecto a u, es decir,

$$f(t, u)=p_0(t)+p_1(t)\, u+\ldots+p_n(t)\, u^n, \tag{7}$$

donde $p_0(t), \ldots, p_n(t)$ son, por ejemplo, funciones continuas de t en el segmento $[a, b]$, el sistema (6) se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas con respecto a $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Si existe una solución del sistema (6), es decir, si existen m números

$$C_1^0,\ C_2^0,\ \ldots,\ C_m^0$$

tales que, al ser sustituidos en el sistema (6), reducen sus ecuaciones a identidades, entonces existe una solución de la ecuación integral (3), que se determina por la igualdad (5):

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i^0 a_i(x).$$

Es evidente que el número de soluciones (en general, complejas) de la ecuación integral (3) es igual al número de soluciones del sistema (6).

Ejemplo. Resolver la ecuación integral

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 xt\, \varphi^2(t)\, dt \tag{8}$$

(λ es un parámetro).

Resolución. Hagamos

$$C = \int_0^1 t\,\varphi^2(t)\,dt. \tag{9}$$

Entonces

$$\varphi(x) = C\lambda x. \tag{10}$$

Sustituyendo $\varphi(x)$ por el segundo miembro de (10) en la relación (9), se tendrá

$$C = \int_0^1 t\,\lambda^2 C^2 t^2\,dt,$$

de donde

$$C = \frac{\lambda^2}{4} C^2. \tag{11}$$

La ecuación (11) tiene dos soluciones:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{4}{\lambda^2}.$$

Por lo tanto, la ecuación integral (8) tiene también dos soluciones para cualquier $\lambda \neq 0$:

$$\varphi_1(x) = 0, \qquad \varphi_2(x) = \frac{4}{\lambda} x.$$

Existen ecuaciones integrales no lineales simples que no tienen soluciones reales.

Veamos, por ejemplo, la ecuación

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{\frac{x+t}{2}} (1 + \varphi^2(t))\,dt. \tag{12}$$

Hagamos

$$C = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{\frac{t}{2}} (1 + \varphi^2(t))\,dt. \tag{13}$$

Entonces

$$\varphi(x) = Ce^{\frac{x}{2}} \tag{14}$$

Para determinar la constante C se obtiene la ecuación

$$\left(e^{\frac{3}{2}} - 1\right) C^2 - 3C + 3\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 0. \tag{15}$$

No es difícil comprobar que la ecuación (15) no tiene raíces reales y que, por lo tanto, la ecuación integral (12) no tiene soluciones reales.

Por otro lado, consideremos la ecuación

$$\varphi(x) = \int_0^1 a(x)\, a(t)\, \varphi(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi(t)}{a(t)}\right) dt \tag{16}$$

$$(a(t) > 0 \text{ para todo } t \in [0, 1]).$$

Para la determinación de la constante C se obtiene la ecuación

$$1 = \int_0^1 a^2(t)\, dt \cdot \operatorname{sen} C. \tag{17}$$

Si $\int_0^1 a^2(t)\, dt > 1$, entonces la ecuación (17) y, por consiguiente, también la ecuación integral inicial (16), tienen un número infinito de soluciones reales.

Resolver las siguientes ecuaciones integrales:

192. $\varphi(x) = 2 \int_0^1 x\, t \varphi^3(t)\, dt.$

193. $\varphi(x) = \int_{-1}^1 (xt + x^2 t^2)\, \varphi^2(t)\, dt.$

194. $\varphi(x) = \int_0^1 x^2 t^2\, \varphi^3(t)\, dt.$

195. $\varphi(x) = \int_{-1}^1 \frac{xt}{1 + \varphi^2(t)}\, dt.$

196. $\varphi(x) = \int_0^1 (1 + \varphi^2(t))\, dt.$

197. Demostrar que la ecuación integral

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 a(x)\, a(t)\, (1 + \varphi^2(t))\, dt$$

$$(a(x) > 0 \text{ para todo } x \in [0, 1])$$

no tiene soluciones reales, si $\int_0^1 a^2(x)\, dx > 1$.

§ 16. Raíces características y funciones propias

La ecuación integral homogénea de Fredholm de segunda especie

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt=0 \tag{1}$$

tiene siempre la solución evidente $\varphi(x)=0$, que se llama solución *nula (trivial)*.

Los valores del parámetro λ, para los cuales esta ecuación tiene soluciones no nulas $\varphi(x)\not\equiv 0$, se llaman *raíces características* *) de la ecuación (1) o del núcleo $K(x, t)$, y cada solución no nula de esta ecuación se llama *función propia* correspondiente a la raíz característica λ.

El número $\lambda=0$ no es raíz característica, puesto que para $\lambda=0$ de (1) se sigue que $\varphi(x)\equiv 0$.

Si el núcleo $K(x, t)$ es continuo en el cuadrado $\Omega\{a\leqslant x, t\leqslant b\}$, o de cuadrado sumable en Ω, y además los números a y b son finitos, entonces a cada raíz característica λ le corresponde un número finito de funciones propias linealmente independientes; el número de estas funciones se denomina *rango* de la raíz característica. Distintas raíces características pueden tener diferente rango.

Para las ecuaciones con núcleo degenerado

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,b_k(t)\right]\varphi(t)\,dt=0, \tag{2}$$

las raíces características son las raíces de la ecuación algebraica

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

cuya potencia es $p\leqslant n$. Aquí $\Delta(\lambda)$ es el determinante del sistema lineal homogéneo

$$\left.\begin{array}{l} (1-\lambda a_{11})\,C_1-\lambda a_{12}C_2-\dots-\lambda a_{1n}C_n=0, \\ -\lambda a_{21}C_1+(1-\lambda a_{22})\,C_2-\dots-\lambda a_{2n}C_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\lambda a_{n1}C_1-\lambda a_{n2}C_2-\dots+(1-\lambda a_{nn})\,C_n=0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

donde las magnitudes a_{mk} y C_m $(k, m=1, 2, \dots, n)$ tienen el mismo sentido que en el parágrafo precedente.

---

*) Ciertos autores utilizan el término "valores propios" en lugar del término "raíces características". Nosotros llamaremos *valor propio* a la magnitud $\sigma=\frac{1}{\lambda}$, donde λ es una raíz característica.

Si la ecuación (3) tiene p raíces ($1 \leqslant p \leqslant n$), la ecuación integral (2) posee p raíces características; a cada raíz característica λ_m ($m=1, 2, \ldots, p$) le corresponde una solución no nula

$$\begin{array}{l} C_1^{(1)}, \quad C_2^{(1)}, \ \ldots, \ C_n^{(1)} \rightarrow \lambda_1, \\ C_1^{(2)}, \quad C_2^{(2)}, \ \ldots, \ C_n^{(2)} \rightarrow \lambda_2, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ C_1^{(p)}, \quad C_2^{(p)}, \ \ldots, \ C_n^{(p)} \rightarrow \lambda_p \end{array}$$

del sistema (4). Las soluciones no nulas de la ecuación integral (2) correspondientes a estas soluciones, es decir, las funciones propias, tendrán la forma

$$\varphi_1(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k^{(1)} a_k(x), \quad \varphi_2(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k^{(2)} a_k(x), \ \ldots,$$
$$\varphi_p(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k^{(p)} a_k(x).$$

La ecuación integral con núcleo degenerado tiene no más de n raíces características y funciones propias correspondientes a éstas.

En el caso de un núcleo arbitrario (no degenerado), las raíces características son ceros del determinante de Fredholm $D(\lambda)$, es decir, polos de la resolvente $R(x, t; \lambda)$. De aquí se deduce, en particular, que la ecuación integral de Volterra $\varphi(x)-\lambda\int_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt=0$, donde $K(x, t)\in L_2(\Omega_0)$, no tiene raíces características (para ésta $D(\lambda)=e^{-A_1\lambda}$, véase el problema 177).

Observación. Las funciones propias se determinan salvo un factor constante, es decir, si $\varphi(x)$ es una función propia que corresponde a cierta raíz característica λ, entonces $C\varphi(x)$, donde C es una constante arbitraria, será también una función propia correspondiente a la misma raíz característica λ.

Ejemplo. Hallar las raíces características y las funciones propias de la ecuación integral

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}(\cos^2 x\cos 2t+\cos 3x\cos^3 t)\,\varphi(t)\,dt=0.$$

Resolución. Se tiene

$$\varphi(x)=\lambda\cos^2 x\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos 2t\,dt+\lambda\cos 3x\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos^3 t\,dt.$$

Introduciendo las anotaciones

$$C_1=\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos 2t\,dt \qquad C_2=\int_0^{\pi}\varphi(t)\cos^3 t\,dt, \tag{1}$$

tendremos

$$\varphi(x)=C_1\lambda\cos^2 x+C_2\lambda\cos 3x. \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene un sistema lineal de ecuaciones homogéneas:

$$\left.\begin{aligned} C_1\left(1-\lambda\int_0^{\pi}\cos^2 t\cos 2t\,dt\right)-C_2\lambda\int_0^{\pi}\cos 3t\cos 2t\,dt=0,\\ -C_1\lambda\int_0^{\pi}\cos^5 t\,dt+C_2\left(1-\lambda\int_0^{\pi}\cos^3 t\cos 3t\,dt\right)=0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Pero, como

$$\int_0^{\pi}\cos^2 t\cos 2t\,dt=\frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi}\cos 3t\cos 2t\,dt=0,$$

$$\int_0^{\pi}\cos^5 t\,dt=0, \qquad \int_0^{\pi}\cos^3 t\cos 3t\,dt=\frac{\pi}{8},$$

el sistema (3) toma la forma

$$\left.\begin{aligned}\left(1-\frac{\lambda\pi}{4}\right)C_1=0,\\ \left(1-\frac{\lambda\pi}{8}\right)C_2=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

La ecuación para hallar las raíces características será

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda\pi}{4} & 0\\ 0 & 1-\frac{\lambda\pi}{8}\end{vmatrix}=0.$$

Las raíces características son $\lambda_1=\frac{4}{\pi}$, $\lambda_2=\frac{8}{\pi}$.

Para $\lambda=\frac{4}{\pi}$, el sistema (4) toma la forma

$$\left\{\begin{aligned} 0\cdot C_1=0,\\ \frac{1}{2}\cdot C_2=0,\end{aligned}\right.$$

de donde $C_2=0$, C_1 es arbitrario. La función propia será $\varphi_1(x)=C_1\lambda\cos^2 x$, o bien, haciendo $C_1\lambda=1$, se obtiene $\varphi_1(x)=\cos^2 x$.

Para $\lambda=\frac{8}{\pi}$, el sistema (4) toma la forma

$$\begin{cases} (-1)\cdot C_1=0, \\ 0\cdot C_2=0, \end{cases}$$

de donde $C_1=0$, C_2 es arbitrario y, por consiguiente, la función propia será $\varphi_2(x)=C_2\lambda\cos 3x$, o bien haciendo $C_2\lambda=1$, se obtiene $\varphi_2(x)=\cos 3x$.

De este modo, las raíces características son:

$$\lambda_1=\frac{4}{\pi}, \qquad \lambda_2=\frac{8}{\pi};$$

las funciones propias correspondientes a éstas son:

$$\varphi_1(x)=\cos^2 x, \qquad \varphi_2(x)=\cos 3x.$$

Una ecuación integral homogénea de Fredholm puede no tener raíces características y funciones propias, a bien no tener raíces características reales y funciones propias.

Ejemplo 1. La ecuación integral homogénea

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1(3x-2)\,t\varphi(t)\,dt=0$$

no tiene raíces características y funciones propias. En efecto, tenemos

$$\varphi(x)=\lambda(3x-2)\int_0^1 t\varphi(t)\,dt.$$

Haciendo

$$C=\int_0^1 t\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

se obtiene

$$\varphi(x)=C\lambda(3x-2). \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1), obtenemos

$$\left[1-\lambda\int_0^1(3t^2-2t)\,dt\right]\cdot C=0. \tag{3}$$

Pero, como $\int_0^1(3t^2-2t)\,dt=0$, la ecuación (3) da $C=0$ y, por consiguiente, $\varphi(x)\equiv 0$.

De este modo, la ecuación homogénea dada tiene sólo la solución nula $\varphi(x) \equiv 0$ para un λ cualesquiera; por lo tanto, ésta no posee raíces características y funciones propias.

Ejemplo 2. La ecuación

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (\sqrt{x}t - \sqrt{t}x)\, \varphi(t)\, dt = 0$$

no tiene raíces características reales y funciones propias.

Tenemos que

$$\varphi(x) = C_1 \lambda \sqrt{x} - C_2 \lambda x, \tag{1}$$

donde

$$C_1 = \int_0^1 t\varphi(t)\, dt, \qquad C_2 = \int_0^1 \sqrt{t}\varphi(t)\, dt. \tag{2}$$

Sustituyendo (1) en (2), después de sencillas transformaciones, obtenemos el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) C_1 + \frac{\lambda}{3} C_2 = 0, \\ -\frac{\lambda}{2} C_1 + \left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right) C_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

El determinante de este sistema es igual a

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2}{5}\lambda & \frac{\lambda}{3} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \frac{2}{5}\lambda \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2}{150}.$$

Para λ reales, éste no se anula, por lo que de (3) se obtiene $C_1 = 0$, y $C_2 = 0$ y, por lo tanto, para todas las λ reales, la ecuación dada tiene sólo la solución trivial: $\varphi(x) \equiv 0$. De esta manera, la ecuación (1) no posee raíces características reales y funciones propias.

Hallar las raíces características y las funciones propias para las siguientes ecuaciones integrales homogéneas con núcleo degenerado:

198. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 x \varphi(t)\, dt = 0.$

199. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \cos t \varphi(t)\, dt = 0.$

200. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}x\operatorname{sen}t\varphi(t)\,dt=0.$

201. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)\,dt=0.$

202. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{1}(45x^2\ln t-9t^2\ln x)\varphi(t)\,dt=0.$

203. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{1}(2xt-4x^2)\varphi(t)\,dt=0.$

204. $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(5xt^3+4x^2t)\varphi(t)\,dt=0.$

205. $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(5xt^3+4x^2t+3xt)\varphi(t)\,dt=0.$

206. $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(x\operatorname{ch}t-t\operatorname{sh}x)\varphi(t)\,dt=0.$

207. $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(x\operatorname{ch}t-t^2\operatorname{sh}x)\varphi(t)\,dt=0.$

208. $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(x\operatorname{ch}t-t\operatorname{ch}x)\varphi(t)\,dt=0.$

Si el n-ésimo núcleo reiterado (iterado) $K_n(x, t)$ del núcleo $K(x, t)$ es simétrico, entonces se puede afirmar que $K(x, t)$ tiene por lo menos una raíz característica (real o compleja), y que las potencias n-ésimas de todas las raíces características son números reales. En particular, para un núcleo antisimétrico $K(x, t)=-K(t, x)$, todas las raíces características son imaginarias puras: $\lambda=\beta i$, donde β es real (véase el problema 220).

El núcleo $K(x, t)$ de una ecuación integral se llama *simétrico*, si se cumple la condición $K(x, t)=K(t, x)$ $(a\leqslant x,\ t\leqslant b)$.

Para la ecuación integral de Fredholm

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt=0, \tag{1}$$

con núcleo simétrico $K(x, t)$, tienen lugar los teoremas siguientes:

Teorema 1. *La ecuación* (1) *tiene por lo menos una raíz característica real.*

Teorema 2. *A cada raíz característica* λ *le corresponde un número finito* q *de funciones propias linealmente independientes de la ecuación* (1), *siendo*

$$\sup q \leqslant \lambda^2 B^2,$$

donde

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt.$$

El número q se llama *rango* o multiplicidad de la raíz característica.

Teorema 3. *Cada par de funciones propias* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, *que corresponden a raíces características diferentes* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *es ortogonal, es decir,*

$$\int_a^b \varphi_1(x)\, \varphi_2(x)\, dx = 0.$$

Teorema 4. *En cada intervalo finito del eje* λ *hay un número finito de raíces características. La cota superior para el número* m *de raíces características situadas en el intervalo* $-l < \lambda < l$ *se determina por la desigualdad*

$$m \leqslant l^2 B^2.$$

En el caso en que el núcleo $K(x, t)$ de la ecuación integral (1) sea la función de Green de cierto problema homogéneo de Sturm-Liouville, la determinación de las raíces características y las funciones propias se reduce a la resolución de dicho problema.

Ejemplo. Hallar las raíces características y las funciones propias de la ecuación homogénea

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0,$$

donde

$$K(x, t) = \begin{cases} \cos x \operatorname{sen} t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \cos t \operatorname{sen} x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Resolución. Escribamos la ecuación dada en la forma

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt + \lambda \int_x^\pi K(x, t)\, \varphi(t)\, dt$$

o bien

$$\varphi(x)=\lambda \operatorname{sen} x \int_0^x \varphi(t) \cos t\, dt+\lambda \cos x \int_x^\pi \varphi(t) \operatorname{sen} t\, dt. \qquad (1)$$

Derivando ambos miembros de (1), se halla

$$\varphi'(x)=\lambda \cos x \int_0^x \varphi(t) \cos t\, dt+\lambda \operatorname{sen} x \cos x\, \varphi(x)-$$

$$-\lambda \operatorname{sen} x \int_x^\pi \varphi(t) \operatorname{sen} t\, dt-\lambda \operatorname{sen} x \cos x\, \varphi(x),$$

o sea

$$\varphi'(x)=\lambda \cos x \int_0^x \varphi(t) \cos t\, dt-\lambda \operatorname{sen} x \int_x^\pi \varphi(t) \operatorname{sen} t\, dt. \qquad (2)$$

Derivando por segunda vez, se obtiene

$$\varphi''(x)=-\lambda \operatorname{sen} x \int_0^x \varphi(t) \cos t\, dt+\lambda \cos^2 x\, \varphi(x)-$$

$$-\lambda \cos x \int_x^\pi \varphi(t) \operatorname{sen} t\, dt+\lambda \operatorname{sen}^2 x\, \varphi(x)=$$

$$=\lambda\varphi(x)-\left[\lambda \operatorname{sen} x \int_0^x \varphi(t) \cos t\, dt+\lambda \cos x \int_x^\pi \varphi(t) \operatorname{sen} t\, dt\right].$$

La expresión entre corchetes es igual a $\varphi(x)$, de forma que

$$\varphi''(x)=\lambda\varphi(x)-\varphi(x).$$

De las igualdades (1) y (2) se halla que

$$\varphi(\pi)=0, \quad \varphi'(0)=0.$$

De este modo, la ecuación integral dada se reduce al siguiente problema de frontera:

$$\varphi''(x)-(\lambda-1)\varphi(x)=0, \qquad (3)$$

$$\varphi(\pi)=0, \qquad \varphi'(0)=0. \qquad (4)$$

Aquí son posibles los tres casos siguientes:

1) $\lambda-1=0$, *ó* $\lambda=1$. *La ecuación (3) toma la forma* $\varphi''(x)=0$. Su solución general será $\varphi(x)=C_1x+C_2$. Utilizando las condiciones de frontera (4), para determinar las incógnitas C_1 y C_2 obtenemos el sistema

$$\begin{cases} C_1\pi+C_2=0, \\ C_1=0, \end{cases}$$

el cual tiene la solución única $C_1=0$, $C_2=0$ y, por consiguiente, la ecuación integral tiene sólo la solución trivial

$$\varphi(x)\equiv 0.$$

2) $\lambda-1>0$, ó $\lambda>1$. La solución general de la ecuación (3) tiene la forma

$$\varphi(x)=C_1 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda-1}\,x+C_2 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda-1}\,x,$$

de donde

$$\varphi'(x)=\sqrt{\lambda-1}\,(C_1 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda-1}\,x+C_2 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda-1}\,x).$$

Para determinar los valores de C_1 y de C_2, las condiciones de frontera dan el sistema

$$\begin{cases} C_1 \operatorname{ch}\pi\sqrt{\lambda-1}+C_2 \operatorname{sh}\pi\sqrt{\lambda-1}=0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad C_2=0. \end{cases}$$

Este tiene la solución única $C_1=0$, $C_2=0$. La ecuación integral tiene la solución trivial $\varphi(x)\equiv 0$. De este modo, para $\lambda\geqslant 1$, la ecuación integral no posee raíces características y, por lo tanto, tampoco tiene funciones propias.

3) $\lambda-1<0$, o sea $\lambda<1$. La solución general de la ecuación (3) será

$$\varphi(x)=C_1\cos\sqrt{1-\lambda}\,x+C_2 \operatorname{sen}\sqrt{1-\lambda}\,x.$$

De aquí hallamos que

$$\varphi'(x)=\sqrt{1-\lambda}\,(-C_1 \operatorname{sen}\sqrt{1-\lambda}\,x+C_2\cos\sqrt{1-\lambda}\,x).$$

En este caso, para la determinación de C_1 y C_2, las condiciones de frontera (4) dan el sistema

$$\left\{\begin{aligned} C_1\cos\pi\sqrt{1-\lambda}+C_2 \operatorname{sen}\pi\sqrt{1-\lambda}&=0, \\ \sqrt{1-\lambda}\,C_2&=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

El determinante de este sistema es

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \cos\pi\sqrt{1-\lambda} & \operatorname{sen}\pi\sqrt{1-\lambda} \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix}.$$

Igualándolo a cero, obtenemos la ecuación para la determinación de las raíces características:

$$\begin{vmatrix} \cos\pi\sqrt{1-\lambda} & \operatorname{sen}\pi\sqrt{1-\lambda} \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix}=0 \tag{6}$$

o sea $\sqrt{1-\lambda}\cos\pi\sqrt{1-\lambda}=0$. Por hipótesis $\sqrt{1-\lambda}\neq 0$, por lo cual $\cos\pi\sqrt{1-\lambda}=0$. De aquí se halla que $\pi\sqrt{1-\lambda}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, donde n *es un entero cualquiera. Todas las raíces de la ecuación (6) vienen*

dadas por la fórmula

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Para valores de $\lambda = \lambda_n$, el sistema (5) toma la forma

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Este tiene un conjunto infinito de soluciones no nulas

$$\begin{cases} C_1 = C \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

donde C es una constante arbitraria. Esto significa que también la ecuación integral original tiene un conjunto infinito de soluciones de la forma

$$\varphi(x) = C \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x,$$

las cuales son funciones propias de dicha ecuación.

De este modo, las raíces características y las funciones propias de la ecuación integral dada serán

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x,$$

donde n es un entero cualquiera.

Hallar las raíces características y las funciones propias de las ecuaciones integrales homogéneas, si sus núcleos tienen la siguiente forma:

209. $K(x, t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(x-1), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

210. $K(x, t) = \begin{cases} t(x+1), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ x(t+1), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

211. $K(x, t) = \begin{cases} (x+1)(t-2), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)(x-2), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

212. $K(x, t) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \operatorname{sen} t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

213. $K(x, t) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \operatorname{sen} t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

214. $K(x, t)=\begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(t-1) & -\pi\leqslant x\leqslant t, \\ \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(x-1) & t\leqslant x\leqslant \pi. \end{cases}$

215. $K(x, t)=\begin{cases} \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{4}\right), & 0\leqslant x\leqslant t, \\ \operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & t\leqslant x\leqslant \pi. \end{cases}$

216. $K(x, t)=e^{-|x-t|}, \ 0\leqslant x\leqslant t, \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$

217. $K(x, t)=\begin{cases} -e^{-t}\operatorname{sh} x, & 0\leqslant x\leqslant t, \\ -e^{-x}\operatorname{sh} t, & 1\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

218. Demostrar que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1\neq\lambda_2$ son las raíces características del núcleo $K(x, t)$, las funciones propias de las ecuaciones

$$\varphi(x)-\lambda_1\int_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt=0,$$

$$\psi(x)-\lambda_2\int_a^b K(t, x)\psi(t)\,dt=0$$

son ortogonales, es decir, $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=0$.

219. Demostrar que, si $K(x, t)$ es núcleo simétrico, entonces el segundo núcleo iterado $K_2(x, t)$ tiene sólo raíces características positivas.

220. Demostrar que, si el núcleo $K(x, t)$ es antisimétrico, es decir, si $K(t, x)=-K(x, t)$, entonces todas sus raíces características son imaginarias puras.

221. Si el núcleo $K(x, t)$ es simétrico, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^m}=A_m \qquad (m=2, 3, \ldots),$$

donde λ_n son las raíces características y A_m son las m-ésimas trazas del núcleo $K(x, t)$.

Aplicando los resultados de los problemas 209, 212 y 216, hallar las sumas de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\mu_n^2)^2}$, donde μ_n son las raíces de la ecuación $2 \operatorname{ctg} \mu = \mu - \frac{1}{\mu}$.

La resolvente de un núcleo simétrico es una función meromorfa de λ, para la cual las raíces características de la ecuación integral son polos simples. Sus residuos, con respecto a los polos λ_i, dan las funciones características correspondientes a dichos valores λ_i (para cualquier valor de t).

Hallar las funciones propias de las ecuaciones integrales cuyas resolventes se determinan por las siguientes fórmulas:

222. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{3-\lambda+3(1-\lambda)(2x-1)(2t-1)}{\lambda^2-4\lambda+3}$.

223. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{(15-6\lambda)xt+(15-10\lambda)x^2t^2}{4\lambda^2-16\lambda+15}$.

224. $R(x, t; \lambda) =$
$$= \frac{4(5-2\lambda)[3-2\lambda+(3-6\lambda)xt]+5(4\lambda^2-8\lambda+3)(3x^2-1)(3t^2-1)}{4(1-2\lambda)(3-2\lambda)(5-2\lambda)}$$

Ecuaciones integrales de Fredholm cuyos núcleos dependen de la diferencia de los argumentos.

Sea dada la ecuación integral

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\, \varphi(t)\, dt, \qquad (1)$$

cuyo núcleo $K(x)$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ es una función par, prolongada en forma periódica a todo el eje OX, de modo que

$$K(x-t) = K(t-x). \qquad (2)$$

Se puede demostrar que las funciones propias de la ecuación (1) son

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^{(1)}(x) &= \cos nx \quad (n=1, 2, \ldots), \\ \varphi_n^{(2)}(x) &= \operatorname{sen} nx \quad (n=1, 2, \ldots), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

y las raices caracteristicas correspondientes,

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

donde a_n son los coeficientes de Fourier de la función $K(x)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos nx \, dx \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

De esta manera, a cada valor λ_n le corresponden dos funciones propias linealmente independientes $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$, por lo cual cada λ_n es una raiz característica doble. La función $\varphi_0(x) = 1$ es también una función propia de la ecuación (1) que corresponde a la raiz caracteristica

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi a_0}, \text{ donde } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x)\, dx.$$

Demostremos, por ejemplo, que $\cos nx$ es una función propia de la ecuación integral

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi a_n} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{6}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(x) \cos nx \, dx.$$

Efectuando la sustitución $x - t = z$, obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) \cos nt \, dt = -\int_{x+\pi}^{x-\pi} K(z) \cos n(x-z)\, dz =$$

$$= \cos nx \int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z) \cos nz \, dz + \operatorname{sen} nx \int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z) \operatorname{sen} nz \, dz = \pi a_n \cos nx,$$

puesto que la segunda integral es igual a cero, en virtud de la paridad de $K(x)$, y la primera integral es el coeficiente de Fourier a_n del desarrollo de la función par $K(x)$ multiplicado por π.

De este modo,

$$\cos nx = \frac{1}{\pi a_n} \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t) \cos nt \, dt,$$

lo cual significa, precisamente, que $\cos nx$ es una función propia de la ecuación (6).

De forma análoga se establece que $\operatorname{sen} nx$ es una función propia de la ecuación integral (6), que corresponde a la misma raíz característica $\frac{1}{\pi a_n}$.

225. Hallar las funciones propias y las raíces características correspondientes de la ecuación

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

226. Demostrar que el núcleo simétrico

$$K(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1-h^2}{1-2h\cos(x-t)+h^2}\ (-\pi\leqslant x,\ t\leqslant\pi)$$

tiene, para $|h|<1$, las funciones propias 1, $\operatorname{sen} nx$, $\cos nx$, que corresponden a las raíces características 1, $1/h^n$, $1/h^n$.

227. Hallar las raíces características y las funciones propias de la ecuación integral

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}K(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

donde $K(x)=x^2\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ es una función periódica con período 2π.

Propiedades extremales de las raíces características y de las funciones propias.

El valor absoluto de la integral doble (integral de Hilbert)

$$|(K\varphi,\ \varphi)|=\left|\int_a^b\int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(x)\,\varphi(t)\,dx\,dt\right|, \tag{1}$$

donde $K(x,\ t)=K(t,\ x)$ es el núcleo simétrico de cierta ecuación integral, en el conjunto de las funciones normalizadas $\varphi(x)$, es decir, tales que

$$(\varphi,\ \varphi)=\int_a^b\varphi^2(x)\,dx=1,$$

tiene un máximo igual a

$$\text{máx}\left|(K\varphi,\ \varphi)\right|=\frac{1}{|\lambda_1|}, \tag{2}$$

donde λ_1 es la menor raíz característica en valor absoluto del núcleo $K(x, t)$. El máximo se alcanza para $\varphi(x)=\varphi_1(x)$, que es la función propia del núcleo que corresponde a λ_1.

Ejemplo. Hallar el máximo de

$$|(K\varphi, \varphi)|=\left|\int_0^\pi\int_0^\pi K(x, t)\varphi(x)\varphi(t)\,dx\,dt\right|$$

con la condición de que

$$(\varphi, \varphi)=\int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx=1,$$

si

$$K(x, t)=\cos x\cos 2t+\cos t\cos 2x+1.$$

Resolución. Resolviendo la ecuación integral homogénea

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi(\cos x\cos 2t+\cos t\cos 2x+1)\,\varphi(t)\,dt$$

como ecuación con núcleo degenerado, hallamos las raíces características $\lambda_1=\frac{1}{\pi}$ y $\lambda_{2,3}=\pm\frac{2}{\pi}$ y las funciones propias correspondientes a las mismas $\varphi_1(x)=C_1$, $\varphi_2(x)=C(\cos x+\cos 2x)$, $\varphi_3(x)=C_3(\cos x-\cos 2x)$, donde C_1, C_2 y C_3 son constantes arbitrarias.

La menor raíz característica en valor absoluto es $\lambda_1=\frac{1}{\pi}$; a ésta le corresponde la función propia $\varphi_1(x)=C_1$. De la condición $(\varphi, \varphi)=1$ se halla que $C_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Por consiguiente

$$\text{máx}\left|\int_0^\pi\int_0^\pi(\cos x\cos 2t+\cos t\cos 2x+1)\,\varphi(t)\,dt\right|=2\pi,$$

y éste se alcanza en las funciones $\varphi(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

228. Hallar el máximo de

$$\left|\int_a^b\int_a^b K(x, t)\,\varphi(x)\varphi(t)\,dx\,dt\right|$$

con la condición de que $\int_a^b\varphi^2(x)\,dx=1$, si:

a) $K(x, t) = xt, \quad 0 \leqslant x, t \leqslant 1;$

b) $K(x, t) = xt + x^2t^2, \quad -1 \leqslant x, t \leqslant 1;$

c) $K(x, t) = \begin{cases} (x+1)t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

Puntos de bifurcación.

Sea dada la ecuación integral no lineal

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))\, dt, \tag{1}$$

y supongamos que $\varphi(x) = 0$ es solución de esta ecuación, siendo, además,

$$K(x, t, 0) = 0.$$

Las soluciones no nulas $\varphi(x) \not\equiv 0$ de la ecuación (1) se llaman, por analogía con las ecuaciones integrales lineales, *funciones propias*, y los valores correspondientes del parámetro λ, *raíces características de esta ecuación*.

Las ecuaciones integrales (1) para pequeños $|\lambda|$ no tienen, en general, soluciones pequeñas diferentes de cero, es decir, para pequeños $|\lambda|$ la ecuación (1) no tiene funciones propias de norma pequeña. Al aumentar $|\lambda|$ pueden aparecer funciones propias pequeñas. *Introduzcamos el siguiente concepto.*

El número λ_0 se llama *punto de bifurcación* de la ecuación no lineal (1), si para cada $\varepsilon > 0$ existe una raíz característica λ de la ecuación (1) tal que $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, además a dicha raíz le corresponde por lo menos una función propia $\varphi(x)$ $(\varphi(x) \not\equiv 0)$ de norma menor que ε: $\|\varphi\| < \varepsilon$. *Con otras palabras, el punto de bifurcación es un* valor del parámetro λ, en cuyo entorno la solución nula de la ecuación (1) se ramifica, es decir, aparecen soluciones no nulas de norma pequeña de dicha ecuación. Para los problemas lineales los valores de bifurcación coinciden con las raíces características.

En los problemas de la técnica y de la física relacionados con las condiciones de la estabilidad, los puntos de bifurcación determinan las fuerzas críticas. Así, el problema de la flexión de una barra recta de una unidad de longitud y de rigidez variable $\rho(x)$ bajo la acción de una fuerza P se reduce a la resolución de la siguiente ecuación integral no lineal:

$$\varphi(x) = P_\rho(x) \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t) \sqrt{1 - \left[\int_0^1 K'_x(x, t)\, \varphi(t)\, dt\right]^2}\, dt, \tag{1'}$$

donde $\varphi(x)$ es la función buscada.

Para pequeñas P la ecuación (1′) tiene sólo la solución nula en el espacio $C[0, 1]$ (en virtud del principio de las transformaciones

contractivas). Esto significa que para P pequeñas la barra no se deforma. Sin embargo, para fuerzas superiores a la llamada fuerza crítica de Euler, surge la flexión. La fuerza crítica de Euler es precisamente el valor de la bifurcación.

Como ejemplo de determinación de los puntos de bifurcación consideremos la ecuación no lineal

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1[\varphi(t)+\varphi^3(t)]\,dt. \tag{2}$$

Hagamos

$$C=\int_0^1[\varphi(t)+\varphi^3(t)]\,dt.$$

Entonces

$$\varphi(x)=C\lambda, \tag{3}$$

y la ecuación (2) se reduce a la ecuación algebraica

$$C=\lambda C+\lambda^3C^3. \tag{4}$$

De (4) se halla que

$$C_1=0;\quad C_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda^3}},$$

de donde, según (3),

$$\varphi_1=0;\quad \varphi_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

De este modo, para $0<\lambda<1$, la ecuación (2) admite soluciones reales no nulas. Para $\lambda=1$, ésta tiene sólo la solución nula $\varphi=0$ (triple).

De esta manera, para todo $0<\varepsilon<1$, el número $\lambda=1-\varepsilon$ es una raiz caracterirstica de la ecuación (2), a la cual le corresponden dos funciones propias:

$$\varphi_1=\frac{\varepsilon^{1/2}}{(1-\varepsilon)^{1/2}};\quad \varphi_2=-\frac{\varepsilon^{1/2}}{(1-\varepsilon)^{1/2}},$$

donde $\varepsilon=1-\lambda$. Esto significa que el punto $\lambda_0=1$ es un punto de *bifurcación de la ecuación (2). También se pueden definir los puntos* de bifurcación de las soluciones no nulas de las ecuaciones integrales no lineales.

Hallar los puntos de bifurcación de las soluciones de las ecuaciones integrales:

229. $\varphi(x)=\lambda\int_0^1 xt\,(\varphi(t)+\varphi^3(t))\,dt.$

230. $\varphi(x)=\lambda\int_0^1(3x-2)\,t\,(\varphi(t)+\varphi^3(t))\,dt.$

(Para más detalles sobre los puntos de bifurcación véase [12].)

§ 17. Resolución de las ecuaciones integrales homogéneas con núcleo degenerado

La ecuación integral homogénea con núcleo degenerado

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\,b_k(t)\right]\varphi(t)\,dt=0,$$

tiene sólo la solución nula $\varphi(x)\equiv 0$, cuando el parámetro λ no es su raíz característica (es decir, $\Delta(\lambda)\neq 0$).

Si, en cambio, λ es una raíz característica (o sea, $\Delta(\lambda)=0$), la ecuación (1) tiene, además de la solución nula, soluciones no nulas, que son funciones propias correspondientes a dicha raíz característica. La solución general de la ecuación homogénea (1) se obtiene como combinación lineal de estas funciones propias.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}(\cos^2 x\cos 2t+\cos^3 t\cos 3x)\,\varphi(t)\,dt=0.$$

Resolución. Las raíces características de la ecuación dada son $\lambda_1=\frac{4}{\pi}$, $\lambda_2=\frac{8}{\pi}$, y las funciones propias respectivas tienen la forma

$$\varphi_1(x)=\cos^2 x,\qquad \varphi_2(x)=\cos 3x.$$

La solución general de la ecuación será

$$\varphi(x)=C\cos^2 x,\quad \text{si}\quad \lambda=\frac{4}{\pi};$$

$$\varphi(x)=C\cos 3x,\quad \text{si}\quad \lambda=\frac{8}{\pi};$$

$$\varphi(x)=0,\quad \text{si}\quad \lambda\neq\frac{4}{\pi},\ \ \lambda\neq\frac{8}{\pi},$$

donde C es una constante arbitraria. La última solución nula se obtiene de las soluciones generales para $C=0$.

Resolver las ecuaciones integrales homogéneas siguientes:

231. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt=0.$

232. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{1}\arccos x\,\varphi(t)\,dt=0.$

233. $\varphi(x)-2\int_{0}^{\pi/4}\frac{\varphi(t)}{1+\cos 2t}\,dt=0.$

234. $\varphi(x)-\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}|x|\,\varphi(t)\,dt=0.$

235. $\varphi(x)+6\int_{0}^{1}(x^2-2xt)\,\varphi(t)\,dt=0.$

§ 18. Ecuaciones simétricas no homogéneas

La ecuación integral de Fredholm de segunda especie, no homogénea

$$\varphi(x)-\lambda\int_{a}^{b}K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{1}$$

se llama *simétrica*, si su núcleo $K(x,\ t)$ es simétrico: $K(x,\ t)\equiv K(t,\ x)$.

Si $f(x)$ es continua y el parámetro λ no coincide con las raíces características λ_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ de la ecuación integral homogénea correspondiente

$$\varphi(x)-\lambda\int_{a}^{b}K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=0, \tag{2}$$

entonces la ecuación (1) tiene una solución continua única, que viene dada por la fórmula

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(x), \tag{3}$$

donde $\varphi_n(x)$ son funciones propias de la ecuación (2), y

$$a_n=\int_{a}^{b}f(x)\,\varphi_n(x)\,dx. \tag{4}$$

La serie del segundo miembro de la fórmula (3) converge en forma absoluta y uniforme en el cuadrado $a\leqslant x,\ t\leqslant b$.

Si, en cambio, el parámetro λ coincide con una de las raíces características, por ejemplo, $\lambda=\lambda_k$, de rango q (multiplicidad de la raiz λ_k), la ecuación (1) no tiene, en general, soluciones. Las soluciones existen cuando, y sólo cuando, se cumplen las q condiciones

$$(f,\ \varphi_m)=0,\quad \text{ó}\quad \int_{a}^{b}f(x)\,\varphi_m(x)\,dx=0 \tag{5}$$

$$(m=1,\ 2,\ \ldots,\ q),$$

es decir, cuando la función $f(x)$ es ortogonal a todas las funciones propias que pertenecen a la raíz característica λ_k. En este caso, la ecuación (1) tiene un conjunto infinito de soluciones, las cuales contienen q constantes arbitrarias y se dan por la fórmula

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(x)+C_1\varphi_1(x)+ \\ +C_2\varphi_2(x)+\ldots+C_q\varphi_q(x), \quad (6)$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_q$ son constantes cualesquiera.

En el caso de un núcleo degenerado

$$K(x, t)=\sum_{k=1}^{m}a_k(x)\,b_k(t),$$

las fórmulas (3) y (6) contendrán en los segundos miembros sumas finitas en lugar de series.

Cuando el segundo miembro de la ecuación (1), es decir, la función $f(x)$ sea ortogonal a todas las funciones propias $\varphi_n(x)$ de la ecuación (2), la solución de (1) será la misma función: $\varphi(x)=f(x)$.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt=x, \quad (1)$$

donde

$$K(x, t)=\begin{cases} x(t-1), & \text{si } 0\leqslant x\leqslant t, \\ t(x-1), & \text{si } t\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Resolución. Las raíces características y las funciones propias respectivas tienen la forma

$$\lambda_n=-\pi^2n^2; \quad \varphi_n(x)=\operatorname{sen}\pi nx, \quad n=1, 2, \ldots$$

Si $\lambda\neq\lambda_n$, la solución de la ecuación (1) será

$$\varphi(x)=x-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda+n^2\pi^2}\operatorname{sen} n\pi x. \quad (2)$$

Hallemos los coeficientes de Fourier a_n del segundo miembro de la ecuación:

$$a_n=\int_0^1 x\operatorname{sen} n\pi x\,dx=\int_0^1 x\,d\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Sustituyéndolos en (2), se obtiene

$$\varphi(x)=x-\frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(\lambda+n^2\pi^2)}\operatorname{sen} n\pi x.$$

Para $\lambda=-n^2\pi^2$, la ecuación (1) no tiene soluciones, puesto que

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\neq 0.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=\cos\pi x,$$

donde

$$K(x,\ t)=\begin{cases}(x+1)\,t, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ (t+1)\,x, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Resolución. Las raíces características son:

$$\lambda_0=1,\qquad \lambda_n=-n^2\pi^2\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Las funciones propias respectivas serán:

$$\varphi_0(x)=e^x,\ \ \varphi_n(x)=\operatorname{sen} n\pi x+n\pi\cos n\pi x\ (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Si $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq -n^2\pi^2$, la solución de la ecuación dada tendrá la forma

$$\varphi(x)=\cos\pi x-\lambda\left[\frac{a_0e^x}{\lambda-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda+n^2\pi^2}(\operatorname{sen} n\pi x+n\pi\cos n\pi x)\right],$$

y como

$$a_0=\int_0^1 e^x\cos\pi x\,dx=-\frac{1+e}{1+\pi^2},$$

$$a_n=\int_0^1\cos\pi x\,(\operatorname{sen} n\pi x+n\pi\cos n\pi x)\,dx=\begin{cases}0, & n\neq 1,\\ \dfrac{\pi}{2}, & n=1,\end{cases}$$

tendremos que

$$\varphi(x)=\cos\pi x+\lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2}\,\frac{e^x}{\lambda-1}-\frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)}(\operatorname{sen}\pi x+\pi\cos\pi x)\right].$$

Para $\lambda=1$ y $\lambda=-\pi^2$ $(n=1)$ la ecuación no tiene soluciones, puesto que su segundo miembro, es decir, la función $\cos\pi x$, no es ortogonal a las funciones propias respectivas

$$\varphi_0(x)=e^x,\qquad \varphi_1(x)=\operatorname{sen}\pi x+\pi\cos\pi x.$$

Si, en cambio, $\lambda=-n^2\pi^2$, donde $n=2, 3, \ldots$, la ecuación dada tiene un conjunto infinito de soluciones, que se dan mediante la fórmula (6):

$$\varphi(x)=\cos\pi x+\lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2}\frac{e^x}{\lambda-1}-\frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)}(\operatorname{sen}\pi x+\pi\cos\pi x)\right]+\\+C(\operatorname{sen}n\pi x+n\pi\cos n\pi x),$$

donde C es una constante arbitraria.

En ciertos casos, la ecuación integral simétrica, no homogénea puede ser reducida a un problema de frontera no homogéneo. Esto puede hacerse cuando el núcleo $K(x, t)$ de la ecuación integral es la función de Green de cierto operador diferencial lineal. Mostremos con un ejemplo cómo se realiza esto.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt=e^x, \tag{1}$$

donde

$$K(x, t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh}1}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \dfrac{\operatorname{sh}t\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Resolución. Escribamos la ecuación dada en la forma

$$\varphi(x)=e^x+\frac{\lambda\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1}\int_0^x\operatorname{sh}t\varphi(t)\,dt+\frac{\lambda\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}\int_x^1\operatorname{sh}(t-1)\varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Derivando dos veces, se halla

$$\varphi'(x)=e^x+\frac{\lambda\operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh}1}\int_0^x\operatorname{sh}t\varphi(t)\,dt+\frac{\lambda\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1}\operatorname{sh}x\varphi(x)+\\+\lambda\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}1}\int_x^1\operatorname{sh}(t-1)\varphi(t)\,dt-\frac{\lambda\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}\operatorname{sh}(x-1)\varphi(x)$$

$$\varphi''(x)=e^x+\frac{\lambda\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1}\int_0^x\operatorname{sh}t\varphi(t)\,dt+\\+\frac{\lambda\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}1}\int_x^1\operatorname{sh}(t-1)\varphi(t)\,dt+\frac{\lambda\operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh}1}\operatorname{sh}x\varphi(x)-\\-\frac{\lambda\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}1}\operatorname{sh}(x-1)\varphi(x)$$

o bien

$$\varphi''(x)=e^x+\varphi(x)+\lambda\varphi(x).$$

Haciendo $x=0$ y $x=1$ en (2), se obtiene que $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=e$. La función buscada $\varphi(x)$ es la solución del problema de frontera no homogéneo

$$\varphi''(x)-(\lambda+1)\varphi(x)=e^x, \tag{3}$$

$$\varphi(0)=1, \qquad \varphi(1)=e. \tag{4}$$

Consideremos los casos siguientes:

1) $\lambda+1=0$, es decir, $\lambda=-1$. La ecuación (3) tiene la forma $\varphi''(x)=e^x$. Su solución general será

$$\varphi(x)=C_1x+C_2+e^x.$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera (4), para la determinación de las constantes C_1 y C_2 se obtiene el sistema

$$\begin{cases} C_2+1=1, \\ C_1+C_2+e=e, \end{cases}$$

cuya solución tiene la forma $C_1=0$, $C_2=0$ y, por lo tanto,

$$\varphi(x)=e^x.$$

2) $\lambda+1>0$, es decir, $\lambda>-1$, $\lambda\neq 0$. La solución general de la ecuación (3) será

$$\varphi(x)=C_1\operatorname{ch}\sqrt{1+\lambda}\,x+C_2\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda}\,x-\frac{e^x}{\lambda}.$$

Las condiciones de frontera (4) dan el sistema

$$C_1-\frac{1}{\lambda}=1,$$

$$C_1\operatorname{ch}\sqrt{1+\lambda}+C_2\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda}-\frac{e}{\lambda}=e,$$

para la determinación de C_1 y C_2, de donde

$$C_1=1+\frac{1}{\lambda}, \qquad C_2=\frac{e-\operatorname{ch}\sqrt{1+\lambda}}{\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda}}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right).$$

Después de transformaciones sencillas, la función buscada $\varphi(x)$ se reduce a la forma

$$\varphi(x)=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\frac{\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda}\,(1-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda}}-\frac{e^x}{\lambda}.$$

3) $\lambda+1<0$, es decir, $\lambda<-1$. Designemos $\lambda+1=-\mu^2$. La solución general de la ecuación (3) será

$$\varphi(x)=C_1\cos\mu x+C_2\operatorname{sen}\mu x+\frac{e^x}{1+\mu^2}.$$

Las condiciones de frontera (4) nos dan el sistema

$$\left.\begin{aligned} C_1+\frac{1}{1+\mu^2}&=1,\\ C_1\cos\mu+C_2\operatorname{sen}\mu&=e\,\frac{\mu^2}{1+\mu^2}\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Aquí, a su vez, son posibles dos casos:

a) μ no es raíz de la ecuación $\operatorname{sen}\mu=0$.

Entonces

$$C_1=\frac{\mu^2}{1+\mu^2},\qquad C_2=\frac{(e-\cos\mu)\,\mu^2}{(1+\mu^2)\operatorname{sen}\mu},$$

y, por lo tanto,

$$\varphi(x)=\frac{\mu^2}{1+\mu^2}\left[\cos\mu x+\frac{e-\cos\mu}{\operatorname{sen}\mu}\operatorname{sen}\mu x\right]+\frac{e^x}{1+\mu^2},$$

donde $\mu=\sqrt{-\lambda-1}$.

b) μ es raíz de la ecuación $\operatorname{sen}\mu=0$, es decir, $\mu=n\pi$ $(n=1,2,\ldots)$. El sistema (5) es incompatible y, por consiguiente, la ecuación dada (1) no tiene soluciones.

En este caso la ecuación integral homogénea correspondiente

$$\varphi(x)+(1+n^2\pi^2)\int_0^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=0\qquad(6)$$

tendrá un conjunto infinito de soluciones no triviales, es decir, los números $\lambda_n=-(1+n^2\pi^2)$ son raíces características, y las soluciones respectivas $\varphi_n(x)=\operatorname{sen}n\pi x$ son funciones propias de la ecuación (6).

Resolver las siguientes ecuaciones integrales simétricas no homogéneas:

236. $\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=\frac{x}{2},$

$$K(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\[2mm] \dfrac{t(2-x)}{2}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

237. $\varphi(x)+\int_0^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=xe^x,$

$$K(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh}1}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\[2mm] \dfrac{\operatorname{sh}t\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

238. $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=x-1,$

$$K(x,\ t)=\begin{cases} x-t, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ t-x, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

239. $\varphi(x)-2\int_0^{\pi/2} K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=\cos 2x,$

$$K(x,\ t)=\begin{cases} \operatorname{sen} x\cos t, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \operatorname{sen} t\cos x, & t\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

240. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi} K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=1,$

$$K(x,\ t)=\begin{cases} \operatorname{sen} x\cos t, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \operatorname{sen} t\cos x, & t\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}$$

241. $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=x,$

$$K(x,\ t)=\begin{cases} (x+1)(t-3), & 0\leqslant x\leqslant t,\\ (t+1)(x-3), & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

242. $\varphi(x)-\int_0^{\pi} K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=\operatorname{sen} x,$

$$K(x,\ t)=\begin{cases} \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{4}\right), & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & t\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}$$

243. $\varphi(x)-\int_0^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=\operatorname{sh} x,$

$$K(x,\ t)=\begin{cases} -e^{-t}\operatorname{sh} x, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ -e^{-x}\operatorname{sh} t, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

244. $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=\operatorname{ch} x,$

$$K(x,\ t)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch} x\operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \dfrac{\operatorname{ch} t\operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

245. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1 |x-t|\,\varphi(t)\,dt=1.$

§ 19. Alternativa de Fredholm

Para las ecuaciones integrales de Fredholm tienen lugar los siguientes teoremas:

Teorema 1 (alternativa de Fredholm). *O bien la ecuación lineal no homogénea de segunda especie*

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{1}$$

tiene una solución única para cualquier función $f(x)$ (de cierta clase suficientemente amplia), o la ecuación homogénea correspondiente

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=0 \tag{2}$$

tiene, por lo menos, una solución no trivial, es decir, no idénticamente nula.

Teorema 2. *Si para la ecuación (1) tiene lugar el primer caso de la alternativa, éste tiene lugar también para la ecuación conjugada*

$$\psi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(t,\ x)\,\psi(t)\,dt=g(x). \tag{3}$$

La ecuación integral homogénea (2) y su ecuación conjugada

$$\psi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(t,\ x)\,\psi(t)\,dt=0 \tag{4}$$

tienen el mismo número finito de soluciones linealmente independientes.

Observación. Si las funciones $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$ son soluciones de la ecuación homogénea (2), su combinación lineal

$$\varphi(x)=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x),$$

donde C_k ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) son constantes arbitrarias, es también una solución de dicha ecuación.

Teorema 3. *La condición necesaria y suficiente de existencia de una solución $\varphi(x)$ de la ecuación no homogénea (1), en el segundo*

caso de la alternativa, es la condición de ortogonalidad del segundo miembro de dicha ecuación, es decir, la función $f(x)$, hacia cualquier solución $\psi(x)$ de la ecuación homogénea (4), conjugada hacia la (2):

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx=0. \tag{5}$$

Observación. Si se cumple la condición (5), la ecuación (1) tendrá un conjunto infinito de soluciones, puesto que dicha ecuación será satisfecha por cualquier función de la forma $\varphi(x)+\bar{\varphi}(x)$, donde $\varphi(x)$ es alguna solución de (1), y $\tilde{\varphi}(x)$, cualquier solución de la ecuación homogénea correspondiente (2). Además, si las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ satisfacen a la ecuación (1), entonces, en virtud de la linealidad, su diferencia $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ es una solución de la ecuación homogénea correspondiente (2).

La alternativa de Fredholm tiene una importancia particular en la práctica. En lugar de demostrar que la ecuación integral dada (1) posee solución, es más sencillo demostrar, con frecuencia, que la ecuación homogénea correspondiente (2) o la ecuación conjugada a ésta (4) tiene sólo solución trivial. En virtud de la alternativa de Fredholm, de aquí se desprende que la ecuación (1) tiene efectivamente solución.

Observaciones. 1) Si el núcleo $K(x, t)$ de la ecuación integral (1) es simétrico, es decir, si $K(x, t)=K(t, x)$, la ecuación homogénea conjugada (4) coincide con la ecuación homogénea (2) correspondiente a la (1).

2) En el caso de una ecuación integral no homogénea con núcleo degenerado

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,b_k(t)\right]\varphi(t)\,dt=f(x),$$

la condición (5) de ortogonalidad del segundo miembro de ésta da las n igualdades

$$\int_a^b f(t)\,b_k(t)\,dt=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Ejemplo 1.

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 (5x^2-3)\,t^2\,\varphi(t)\,dt=e^x.$$

Resolución. Tenemos que

$$\varphi(x)=C\lambda\,(5x^2-3)+e^x, \tag{1}$$

donde

$$C=\int_0^1 t^2\varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene que

$$C=C\lambda\int_0^1 (5t^4-3t^2)\,dt+\int_0^1 t^2e^t\,dt,$$

de donde

$$C=e-2.$$

La ecuación dada tiene la solución única

$$\varphi(x)=\lambda(e-2)(5x^2-3)+e^x,$$

para λ cualesquiera, y la ecuación homogénea correspondiente

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 (5x^2-3)\,t^2\varphi(t)\,dt=0$$

tiene sólo la solución nula $\varphi(x)\equiv 0$.

Ejemplo 2.

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \operatorname{sen}\ln x\,\varphi(t)\,dt=2x.$$

Resolución. Tenemos que

$$\varphi(x)=C\lambda\operatorname{sen}\ln x+2x,$$

donde $C=\int_0^1\varphi(t)\,dt$. Sustituyendo la expresión $\varphi(t)$ en la integral, se halla que

$$C=C\lambda\int_0^1 \operatorname{sen}\ln t\,dt+1,$$

de donde

$$C\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)=1.$$

Si $\lambda\neq -2$, la ecuación dada tiene la solución única $\varphi(x)=\frac{2\lambda}{2+\lambda}\times$ $\times\operatorname{sen}\ln x+2x$, y la ecuación homogénea correspondiente

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \operatorname{sen}\ln x\,\varphi(t)\,dt=0$$

tiene sólo la solución nula $\varphi(x)\equiv 0$.

Si, en cambio, $\lambda = -2$, la ecuación dada no tiene solución, puesto que el segundo miembro $f(x) = 2x$ no es ortogonal a la función $\operatorname{sen} \ln x$; la ecuación homogénea tiene un conjunto infinito de soluciones, puesto que de la ecuación para determinar $C: 0 \cdot C = 0$ se deduce que C es una constante arbitraria; todas estas soluciones se dan por la fórmula

$$\varphi(x) = \tilde{C} \operatorname{sen} \ln x \qquad (\tilde{C} = -2C).$$

Ejemplo 3.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x + t)\, \varphi(t)\, dt = \cos 3x.$$

Resolución. Escribamos la ecuación en la forma

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} (\cos x \cos t - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} t)\, \varphi(t)\, dt = \cos 3x.$$

De aquí se halla que

$$\varphi(x) = C_1 \lambda \cos x - C_2 \lambda \operatorname{sen} x + \cos 3x, \tag{1}$$

donde

$$C_1 = \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos t\, dt, \quad C_2 = \int_0^{\pi} \varphi(t) \operatorname{sen} t\, dt. \tag{2}$$

Sustituyendo (1) en (2), se obtiene

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^{\pi} (C_1 \lambda \cos t - C_2 \lambda \operatorname{sen} t + \cos 3t) \cos t\, dt, \\ C_2 = \int_0^{\pi} (C_1 \lambda \cos t - C_2 \lambda \operatorname{sen} t + \cos 3t) \operatorname{sen} t\, dt, \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} C_1 \left(1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt\right) + C_2 \lambda \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \cos t\, dt = \int_0^{\pi} \cos 3t \cos t\, dt, \\ -C_1 \lambda \int_0^{\pi} \cos t \operatorname{sen} t\, dt + C_2 \left(1 + \lambda \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt\right) = \int_0^{\pi} \cos 3t \operatorname{sen} t\, dt \end{cases}$$

o bien

$$\left. \begin{aligned} C_1 \left(1 - \lambda \frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ C_2 \left(1 + \lambda \frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

El determinante de este sistema es igual a

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda\frac{\pi}{2} & 0\\ 0 & 1+\lambda\frac{\pi}{2}\end{vmatrix}=1-\frac{\pi^2}{4}\lambda^2.$$

1) Si $\lambda\neq\pm\frac{2}{\pi}$ $(\Delta(\lambda)\neq 0)$, el sistema (3) tiene la solución única $C_1=0$, $C_2=0$ y, por lo tanto, la ecuación dada posee la solución única $\varphi(x)=\cos 3x$; la ecuación homogénea correspondiente

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^\pi\cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt=0 \tag{4}$$

tiene sólo la solución nula $\varphi(x)=0$.

2) Si $\lambda=\frac{2}{\pi}$, el sistema (3) toma la forma

$$\begin{cases}C_1\cdot 0=0,\\ C_2\cdot 2=0.\end{cases}$$

De aquí se deduce que $C_2=0$, y $C_1=C$, donde C es una constante arbitraria. La ecuación dada tiene un conjunto infinito de soluciones, que se dan por la fórmula

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}C\cdot\cos x+\cos 3x$$

o bien

$$\varphi(x)=\tilde{C}\cdot\cos x+\cos 3x\left(\tilde{C}=\frac{2C}{\pi}\right);$$

la ecuación homogénea correspondiente (4) tiene el conjunto infinito de soluciones

$$\varphi(x)=\tilde{C}\cdot\cos x.$$

3) Si $\lambda=-\frac{2}{\pi}$, el sistema (3) toma la forma

$$\begin{cases}2\cdot C_1=0,\\ 0\cdot C_2=0,\end{cases}$$

de donde $C_1=0$, $C_2=C$, siendo C una constante arbitraria.

La solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}C\cdot\operatorname{sen}x+\cos 3x$$

o bien

$$\varphi(x)=\tilde{C}\cdot\operatorname{sen}x+\cos 3x\left(\tilde{C}=\frac{2C}{\pi}\right).$$

En este ejemplo el núcleo $K(x, t) = \cos(x+t)$ de la ecuación dada es simétrico: $K(x, t) = K(t, x)$; el segundo miembro de la ecuación, es decir, la función $f(x) = \cos 3x$, es ortogonal a las funciones $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en el segmento $[0, \pi]$.

Estudiar la resolubilidad de las ecuaciones integrales siguientes, para diferentes valores del parámetro λ:

246. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos^2 x \varphi(t)\, dt = 1.$

247. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} x e^t \varphi(t)\, dt = x.$

248. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} |x - \pi| \varphi(t)\, dt = x.$

249. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{1} (2xt - 4x^2) \varphi(t)\, dt = 1 - 2x.$

250. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2xt) \varphi(t)\, dt = x^3 - x.$

251. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi} \cos x \cos t + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2t \right) \times$

$$\times \varphi(t)\, dt = \operatorname{sen} x.$$

252. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{1} K(x, t) \varphi(t)\, dt = 1,$ donde

$$K(x, t) = \begin{cases} \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \operatorname{ch} t \cdot \operatorname{sh} x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

§ 20. Construcción de la función de Green para las ecuaciones diferenciales ordinarias

Sea dada la ecuación diferencial de n-ésimo orden:

$$L[y] \equiv p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0, \qquad (1)$$

donde las funciones $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ son continuas en $[a, b]$, $p_0(x) \neq 0$ en $[a, b]$, y las condiciones de frontera:

$$V_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_k^{(n-1)} y^{n-1}(a) + \beta_k y(b) + \\ + \beta_k^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) \ (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

donde las formas lineales $V_1, \ldots, V_n$ de $y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a)$, $y(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$ son linealmente independientes.

Supondremos que el problema homogéneo de frontera (1)—(2) admite sólo la solución trivial $y(x) \equiv 0$.

Definición. *Se llama función de Green del problema de frontera* (1)—(2) *a la función* $G(x, \xi)$, *construida para cualquier punto* ξ, $a < \xi < b$, *y que posee las cuatro propiedades siguientes:*

1ª. $G(x, \xi)$ *es continua y tiene derivadas continuas con respecto a* x *hasta de* $(n-2)$*-ésimo grado inclusive para* $a \leqslant x \leqslant b$.

2ª. *Su derivada* $(n-1)$*-ésima con respecto a* x *tiene una discontinuidad de primera especie en el punto* $x=\xi$, *siendo el salto igual a* $\frac{1}{p_0(x)}$, *es decir,*

$$\left.\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}. \tag{3}$$

3ª. *En cada intervalo* $[a, \xi)$ *y* $(\xi, b]$, *la función* $G(x, \xi)$, *considerada como función de* x, *es una solución de la ecuación* (1):

$$L[G] = 0 \tag{4}$$

4ª. $G(x, \xi)$ *satisface a las condiciones de frontera* (2):

$$V_k(G) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Teorema 1. *Si el problema de frontera* (1)—(2) *tiene sólo la solución trivial* $y(x) \equiv 0$, *el operador* L *posee una, y sólo una, función de Green* $G(x, \xi)$.

Demostración. Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ soluciónes linealmente independientes de la ecuación $L[y]=0$. Entonces, en virtud de la propiedad 3ª, la función buscada $G(x, \xi)$ en los intervalos $[a, \xi)$ y $(\xi, b]$ debe tener la siguiente forma:

$$G(x, \xi) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \ldots + a_n y_n(x) \text{ para } a \leqslant x \leqslant \xi$$

y

$$G(x, \xi) = b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \ldots + b_n y_n(x) \text{ para } \xi \leqslant x < b.$$

Aquí $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ son ciertas funciones de ξ. La continuidad de la función $G(x, \xi)$ y de sus primeras $n-2$ derivadas respecto a x en el punto $x=\xi$ nos da las fórmulas:

$$[b_1 y_1(\xi) + \ldots + b_n y_n(\xi)] - [a_1 y_1(\xi) + \ldots + a_n y_n(\xi)] = 0,$$
$$[b_1 y_1'(\xi) + \ldots + b_n y_n'(\xi)] - [a_1 y_1'(\xi) + \ldots + a_n y_n'(\xi)] = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[b_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \ldots + b_n y_n^{(n-2)}(\xi)] - [a_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \ldots + a_n y_n^{(n-2)}(\xi)] = 0,$$

y la condición (3) toma la forma

$$[b_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \ldots + b_n y_n^{(n-1)}(\xi)] - \\ - [a_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \ldots + a_n y_n^{(n-1)}(\xi)] = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Haciendo $c_k(\xi)=b_k(\xi)-a_k(\xi)$ $(k=1, 2, \ldots n)$, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales con respecto a $c_k(\xi)$:

$$\left.\begin{array}{l} c_1y_1(\xi)+c_2y_2(\xi)+\ldots+c_ny_n(\xi)=0, \\ c_1y_1'(\xi)+c_2y_2'(\xi)+\ldots+c_ny_n'(\xi)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1y_1^{(n-2)}(\xi)+c_2y_2^{(n-2)}(\xi)+\ldots+c_ny_n^{(n-2)}(\xi)=0, \\ c_1y_1^{(n-1)}(\xi)+c_2y_2^{(n-1)}(\xi)+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}(\xi)=\frac{1}{p_0(\xi)}. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

El determinante del sistema (6) es igual al valor del wronskiano $W(y_1\cdot y_2, \ldots, y_n)$ en el punto $x=\xi$, por lo que es diferente de cero. Por esto, el sistema (6) determina unívocamente las funciones $c_k(\xi)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Para hallar las funciones $a_k(\xi)$ y $b_k(\xi)$ se utilizan las condiciones de frontera (2). Escribamos $V_k(y)$ en la forma

$$V_k(y)=A_k(y)+B_k(y), \qquad (7)$$

donde

$$A_k(y)=\alpha_k y(a)+\alpha_k^{(1)}y'(a)+\ldots+\alpha_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(a),$$
$$B_k(y)=\beta_k y(b)+\beta_k^{(1)}y'(b)+\ldots+\beta_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(b).$$

Entonces, en virtud de las condiciones (5), se obtiene

$$V_k(G)=a_1A_k(y_1)+a_2A_k(y)+\ldots+a_nA_k(y_n)+$$
$$+b_1B_k(y_1)+b_2B_k(y_2)+\ldots+b_nB_k(y_n)=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

Teniendo en cuenta que $a_k=b_k-c_k$, tendremos que

$$(b_1-c_1)A_k(y_1)+(b_2-c_2)A_k(y_2)+\ldots+(b_n-c_n)A_k(y_n)+$$
$$+b_1B_k(y_1)+b_2B_k(y_2)+\ldots+b_nB_k(y_n)=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

De aquí y en virtud de (7),

$$b_1V_k(y_1)+b_2V_k(y_2)+\ldots+b_nV_k(y_n)=$$
$$=c_1A_k(y_1)+c_2A_k(y_2)+\ldots+c_nA_k(y_n) \quad (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (8)$$

Obsérvese que el sistema (8) es lineal con respecto a las magnitudes $b_1, \ldots, b_n$. El determinante de éste es diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \ldots & V_1(y_n) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \ldots & V_2(y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ V_n(y_1) & V_n(y_2) & & V_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (9)$$

en virtud de nuestra hipótesis sobre la independencia lineal de las formas $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (8) tiene solución única con respecto a $b_1(\xi), b_2(\xi), \ldots, b_n(\xi)$, y como $a_k(\xi)=b_k(\xi)-c_k(\xi)$, las magnitudes $a_k(\xi)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ se determinan también unívocamente. Con esto quedan demostradas la existencia y la unicidad de

la función de Green $G(x, \xi)$, así como también se ha dado un método **de su construcción.**

Observación 1. Si el problema de frontera (1)—(2) es auto-**conjugado, la función** de Green es simétrica, o sea

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Es válida también la afirmación recíproca.

Observación 2. Si en uno de los extremos del segmento $[a, b]$ el coeficiente de la derivada de orden mayor se anula, por ejemplo, $p_0(a) = 0$, entonces se plantea la condición natural de frontera de que la solución sea acotada para $x = a$, y en el otro extremo se da la condición común de frontera (véase más abajo el ejemplo 2).

Caso particular importante

Consideremos la construcción de la función de Green para la ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0,$$
$$p(x) \neq 0 \text{ en } [a, b], \; p(x) \in C^{(1)}[a, b] \tag{10}$$

con las condiciones de frontera

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{11}$$

Supongamos que $y_1(x)$ es la solución de la ecuación (10), determinada por las condiciones iniciales

$$y_1(a) = 0, \qquad y_1'(a) = \alpha \neq 0. \tag{12}$$

Esta solución, en general, no satisface a la segunda condición de frontera; por esto, supondremos que $y_1(b) \neq 0$ *). Pero las funciones de la forma $C_1y_1(x)$, donde C_1 es una constante arbitraria, son, evidentemente, soluciones de la ecuación (10) y satisfacen a la condición de frontera

$$y(a) = 0.$$

Análogamente, hallemos una solución no nula $y_2(x)$ de la ecuación (10) que satisfaga a la segunda condición de frontera, es decir,

$$y_2(b) = 0. \tag{13}$$

Esta misma condición será satisfecha por todas las soluciones de la familia $C_2y_2(x)$, donde C_2 es una constante arbitraria.

Ahora, la función de Green para el problema (10)—(11) se busca en la forma

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1y_1(x) & \text{para } a \leqslant x \leqslant \xi, \\ C_2y_2(x) & \text{para } \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{14}$$

---

*) La suposición de que $y_1(b) \neq 0$ corresponde, en el caso general, a la hipótesis de que el problema de frontera (1)—(2) posee sólo solución trivial (véase más arriba el teorema 1) (*N. del T.*).

y las constantes C_1 y C_2 se eligen de forma que se cumplan las propiedades 1ª y 2ª, es decir, que la función $G(x, \xi)$ sea continua con respecto a x para ξ fija; en particular, que sea continua en el punto $x=\xi$:

$$C_1 y_1(\xi) = C_2 y_2(\xi)$$

y que $G'_x(x, \xi)$ tenga en el punto $x=\xi$ un salto igual a $\frac{1}{p(\xi)}$:

$$C_2 y_2'(\xi) - C_1 y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Escribamos las dos últimas igualdades así:

$$\left.\begin{aligned} -C_1 y_1(\xi) + C_2 y_2(\xi) &= 0, \\ -C_1 y_1'(\xi) + C_2 y_2'(\xi) &= \frac{1}{p(\xi)}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

El determinante del sistema (15) es el wronskiano $W[y_1(x), y_2(x)] = W(x)$, calculado en el punto $x=\xi$, para las soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de la ecuación (10), lo que significa que es diferente de cero:

$$W(\xi) \neq 0,$$

de manera que las magnitudes C_1 y C_2 se determinan inmediatamente del sistema (15):

$$C_1 = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)\, W(\xi)}, \quad C_2 = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)\, W(\xi)}. \tag{16}$$

Sustituyendo las expresiones para C_1 y C_2 en (14), obtenemos definitivamente

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\, y_2(\xi)}{p(\xi)\, W(\xi)}, & a \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{y_1(\xi)\, y_2(x)}{p(\xi)\, W(\xi)}, & \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{17}$$

Observación 1. Las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ que hemos escogido de la ecuación (10) son linealmente independientes, en virtud de la hipótesis de que $y_1(b) \neq 0$*).

En efecto, todas las soluciones linealmente dependientes de $y_1(x)$ tienen la forma $C_1 y_1(x)$ y, por consiguiente, para $C_1 \neq 0$ no se anulan en el punto $x=b$, en el cual, de acuerdo con nuestra elección, la solución $y_2(x)$ se anula.

Observación 2. El problema de frontera para la ecuación de segundo orden de la forma

$$y''(x) + p_1(x)\, y'(x) + p_2(x)\, y(x) = 0 \tag{18}$$

y con las condiciones de frontera

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \tag{19}$$

se reduce al problema considerado (10)—(11) así:

---

*) Véase la nota al pie de la pág. 126 (*N. del T*).

1) La ecuación lineal (18) se reduce a la forma (10) mediante la multiplicación de (18) por $p(x)=e^{\int p_1(x)\,dx}$ (como $q(x)$ debe tomarse $p(x)\,p_2(x)$).

2) Las condiciones de frontera (19) se reducen a las condiciones nulas (11) mediante el cambio lineal de variables

$$z(x)=y(x)-\frac{B-A}{b-a}(x-a)-A.$$

Al efectuar dicho cambio, la lineabilidad de la ecuación (18) no se altera, pero, a diferencia de la ecuación (10), ahora obtenemos una ecuación con segundo miembro $L[z]=f(x)$, donde

$$f(x)=-\left[A+\frac{B-A}{b-a}(x-a)\right]q(x)-\frac{B-A}{b-a}\,p(x).$$

Sin embargo, la función de Green se construye para el problema de frontera homogéneo $L[z]=0$, $z(a)=z(b)=0$, la cual coincide enteramente con el problema (10)—(11).

Ejemplo 1. Construir la función de Green para el problema de frontera homogéneo

$$y^{\mathrm{IV}}(x)=0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0)&=y'(0)=0,\\ y(1)&=y'(1)=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Resolución 1. Demostremos, ante todo, que el problema de frontera (1)—(2) tiene sólo solución trivial. En efecto, el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (1) es

$$y_1(x)=1,\quad y_2(x)=x,\quad y_3(x)=x^2,\quad y_4(x)=x^3, \tag{3}$$

de manera que su solución general tiene la forma

$$y(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3,$$

donde A, B, C, D son constantes arbitrarias. Las condiciones de frontera (2) nos dan cuatro igualdades para determinar A, B, C y D:

$$\begin{aligned} y(0)&=A=0,\\ y'(0)&=B=0,\\ y(1)&=A+B+C+D=0,\\ y'(1)&=B+2C+3D=0.\end{aligned}$$

De aquí se tiene que $A=B=C=D=0$.

De este modo, el problema (1)—(2) tiene solamente la solución trivial $y(x)\equiv 0$; por lo tanto, para éste se puede construir una (y además, sólo una) función de Green $G(x, \xi)$.

2. Construyamos ahora la función de Green. Utilizando el sistema fundamental de soluciones (3), representemos la función buscada de Green en la forma

$$G(x, \xi)=a_1\cdot 1+a_2\cdot x+a_3\cdot x^2+a_4\cdot x^3 \quad \text{para } 0\leqslant x\leqslant \xi, \tag{4}$$

$$G(x, \xi)=b_1\cdot 1+b_2\cdot x+b_3\cdot x^2+b_4\cdot x^3 \quad \text{para } \xi\leqslant x\leqslant 1, \tag{5}$$

siendo a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 funciones de ξ por ahora desconocidas. Hagamos $c_k(\xi)=b_k(\xi)-a_k(\xi)$ $(k=1, 2, 3, 4)$ y escribamos el sistema de ecuaciones lineales para hallar las funciones $c_k(\xi)$ (véase el sistema (6) en la pág. 125):

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_2\xi+c_3\xi^2+c_4\xi^3&=0,\\ c_2+c_3\cdot 2\xi+c_4\cdot 3\xi^2&=0,\\ c_3\cdot 2+c_4\cdot 6\xi&=0,\\ c_4\cdot 6&=1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Resolviendo este sistema, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} c_1(\xi)=-\frac{1}{6}\xi^3,\quad c_2(\xi)=\frac{1}{2}\xi^2,\\ c_3(\xi)=-\frac{1}{2}\xi,\quad c_4(\xi)=\frac{1}{6}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Apliquemos ahora la propiedad 4ª de la función de Green, precisamente aquella que debe satisfacer a las condiciones de frontera (2), es decir,

$$G(0,\ \xi)=0,\qquad G'_x(0,\ \xi)=0,$$
$$G(1,\ \xi)=0,\qquad G'_x(1,\ \xi)=0.$$

En nuestro caso estas igualdades toman la forma

$$\left.\begin{aligned} a_1&=0,\\ a_2&=0,\\ b_1+b_2+b_3+b_4&=0,\\ b_2+2b_3+3b_4&=0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Como $c_k=b_k-a_k$ $(k=1, 2, 3, 4)$, de (7) y (8) se halla:

$$\left.\begin{aligned} &a_1=0;\quad b_1=-\frac{1}{6}\xi^3; && a_2=0;\ b_2=\frac{1}{2}\xi^2;\\ &b_3=\frac{1}{2}\xi^3-\xi^2; && b_4=\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{3}\xi^3;\\ &a_3=\frac{1}{2}\xi-\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3; && a_4=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{3}\xi^3. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes a_1, a_2, ..., b_4 dados por la (9) en (4) y (5), obtenemos la función de Green buscada

$$G(x,\ \xi)=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\xi-\xi^2+\frac{1}{2}\xi^3\right)x^2-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\xi^2+\frac{1}{3}\xi^3\right)x^3, \\ \qquad\qquad\qquad 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ -\frac{1}{6}\xi^3+\frac{1}{2}\xi^2 x+\left(\frac{1}{2}\xi^3-\xi^2\right)x^2+\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{3}\xi^3\right)x^3\\ \qquad\qquad\qquad \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

La última expresión puede ser transformada fácilmente a la forma

$$G(x,\ \xi)=\left(\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3\right)\xi^2-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)\xi^3$$
$$\text{para } \xi\leqslant x\leqslant 1,$$

de manera que $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, es decir, la función de Green es simétrica. Esto hubiera podido afirmarse de antemano, puesto que el problema de frontera (1)—(2) es autoconjugado.

Recomendamos al lector que demuestre esto por su cuenta. Además, aconsejamos verificar que la función de Green hallada satisface a las propiedades 1ª, 2ª, 3ª y 4ª enunciadas al definir ésta.

Ejemplo 2. Construir la función de Green para la ecuación diferencial

$$xy'' + y' = 0 \tag{1}$$

con las condiciones siguientes:

$$\begin{gathered} y(x) \text{ está acotada para } x \to 0, \\ y(1) = \alpha y'(1), \ \alpha \neq 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Resolución. Hallemos, primeramente, la solución general de la ecuación (1) y demostremos que las condiciones (2) se cumplen sólo cuando

$$y(x) = 0.$$

En efecto, denotando $y'(x) = z(x)$, se obtiene $xz' + z = 0$, de donde $\ln z = \ln c_1 - \ln x$, $z = \frac{c_1}{x}$, por lo que

$$y(x) = c_1 \ln x + c_2. \tag{3}$$

Está claro que la función $y(x)$, determinada por la fórmula (3), satisface a las condiciones (2) sólo para $c_1 = c_2 = 0$. Por consiguiente, la función de Green puede ser construida para el problema (1)—(2).

Escribamos formalmente $G(x, \xi)$ en la forma

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1 + a_2 \ln x & \text{para } 0 < x \leqslant \xi, \\ b_1 + b_2 \ln x & \text{para } \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{4}$$

De la continuidad de $G(x, \xi)$ para $x = \xi$ se obtiene

$$b_1 + b_2 \ln \xi - a_1 - a_2 \ln \xi = 0;$$

el salto de $G'_x(x, \xi)$ en el punto $x = \xi$ es igual a $\frac{1}{\xi}$, de forma que

$$b_2 \cdot \frac{1}{\xi} - a_2 \cdot \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi}.$$

Haciendo

$$c_1 = b_1 - a_1, \ c_2 = b_2 - a_2, \tag{5}$$

tendremos que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \ln \xi = 0, \\ \qquad c_2 = 1, \end{cases}$$

de donde

$$c_1 = -\ln \xi, \qquad c_2 = 1. \tag{6}$$

Apliquemos ahora las condiciones (2). La acotacón de $G(x, \xi)$ para $x \to 0$ nos da $a_2 = 0$, y de la condición $G(x, \xi) = \alpha G'_x(x, \xi)$ se obtiene $b_1 = \alpha b_2$. Teniendo en cuenta (5) y (6), se obtienen los valores

de todos los coeficientes en (4):

$$a_1=\alpha+\ln\xi,\quad a_2=0,\quad b_1=\alpha,\quad b_2=1.$$

De este modo,

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\alpha+\ln\xi, & 0<x\leqslant\xi,\\ \alpha+\ln x, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Ejemplo 3. Hallar la función de Green del problema de frontera

$$y''(x)+k^2y=0,$$
$$y(0)=y(1)=0.$$

Resolución. Es fácil convencerse de que la solución $y_1(x)=\operatorname{sen} kx$ satisface a la condición de frontera $y_1(0)=0$, y la solución $y_2(x)=\operatorname{sen} k(x-1)$, a la condición $y_2(1)=0$, siendo éstas linealmente independientes. Hallemos el valor del determinante de Wronsky para $\operatorname{sen} kx$ y $\operatorname{sen} k(x-1)$ en el punto $x=\xi$:

$$W(\xi)=\begin{vmatrix}\operatorname{sen} k\xi & \operatorname{sen} k(\xi-1)\\ k\cos k\xi & \cos k(\xi-1)\end{vmatrix}=k[\operatorname{sen} k\xi\cos k(\xi-1)-\operatorname{sen} k(\xi-1)\times$$
$$\times\cos k\xi]=k\operatorname{sen} k.$$

Obsérvese, además, que en nuestro ejemplo es $p(x)=1$. Por esto, según (17), se obtiene que

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} k(\xi-1)\operatorname{sen} kx}{k\operatorname{sen} k}, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\[2mm] \dfrac{\operatorname{sen} k\xi\cdot\operatorname{sen} k(x-1)}{k\operatorname{sen} k}, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Establecer en los ejemplos siguientes si existe o no la función de Green para el problema de frontera dado y, si existe, construirla.

253. $y''=0;\ y(0)=y'(1),\ y'(0)=y(1).$

254. $y''=0;\ y(0)=y(1),\ y'(0)=y'(1).$

255. $y''+y=0;\ y(0)=y(\pi)=0.$

256. $y^{\mathrm{IV}}=0;\ y(0)=y'(0)=y''(1)=y'''(1)=0.$

257. $y'''=0;\ y(0)=y'(1)=0,\ y'(0)=y(1).$

258. $y'''=0;\ y(0)=y(1)=0,\ y'(0)=y'(1).$

259. $y''=0;\ y(0)=0,\ y(1)=y'(1).$

260. $y''+y'=0;\ y(0)=y(1),\ y'(0)=y'(1).$

261. $y''-k^2y=0\ (k\neq 0);\ y(0)=y(1)=0.$

262. $y''+y=0;\ y(0)=y(1),\ y'(0)=y'(1).$

263. $y'''=0;\ y(0)=y(1)=0,\ y'(0)+y'(1)=0.$

264. $y''=0;\ y'(0)=hy(0),\ y'(1)=-Hy(1).$

265. $x^2y'' + 2xy' = 0$; $y(x)$ está acotada para $x \to 0$, $y(1) = \alpha y'(1)$.

266. $x^3y^{IV} + 6x^2y''' + 6xy'' = 0$; $y(x)$ está acotada para $x \to 0$, $y(1) = y'(1) = 0$.

267. $x^2y'' + xy' - y = 0$; $y(x)$ está acotada para $x \to 0$, $y(1) = 0$.

268. $xy'' + y' - \frac{1}{x}y = 0$; $y(0)$ es finito, $y(1) = 0$.

269. $x^2y'' + xy' - n^2y = 0$; $y(0)$ es finito, $y(1) = 0$.

270. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$; $y(0)$ es finito, $y(1) = 0$.

271. $\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{d}{dx}\right] = 0$; $y(0) = 0$, $y(1)$ es finito.

272. $xy'' + y' = 0$; $y(0)$ está acotado, $y(l) = 0$.

273. $y'' - y = 0$; $y(0) = y'(0)$, $y(l) + \lambda y'(l) = 0$.

(Considerar los casos $\lambda = 1, \lambda = -1$, $|\lambda| \neq 1$.)

§ 21. Aplicación de la función de Green a la resolución de los problemas de frontera

Sea dada una ecuación diferencial con segundo miembro:

$$L[y] \equiv p_0(x)\, y^{(n)}(x) + p_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)\, y(x) = f(x) \quad (1)$$

y las condiciones de frontera

$$V_1(y) = 0, \; V_2(y) = 0, \; \ldots, \; V_n(y) = 0, \quad (2)$$

y consideremos, como en el § 20, que las formas lineales $V_1, V_2, \ldots, V_n$ de $y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$ son linealmente independientes.

Teorema. *Si $G(x, \xi)$ es la función de Green del problema de frontera homogéneo*

$$L[y] = 0,$$
$$V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

la solución del problema de frontera (1)—(2) viene dada por la fórmula

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi \quad (3)$$

Ejemplo 1. Resolver el problema de frontera

$$y''(x) - y(x) = x, \tag{1}$$
$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

aplicando la función de Green.

a) Veamos, primeramente, si existe o no la función de Green para el problema de frontera homogéneo correspondiente

$$y''(x) - y(x) = 0, \tag{1'}$$
$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2'}$$

Es evidente que $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (1'). Por lo tanto, la solución general de dicha ecuación será

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

Las condiciones de frontera (2) se satisfarán si, y sólo si, $A = B = 0$, o sea, $y(x) \equiv 0$. De esta manera, la función de Green existe.

b) Es fácil comprobar que

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(\xi - 1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}(x - 1)}{\operatorname{sh} 1}, & \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{3}$$

es la función de Green del problema de frontera (1')—(2').

c) La solución del problema de frontera (1)—(2) se escribe en la forma

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi)\, \xi \, d\xi, \tag{4}$$

donde $G(x, \xi)$ se determina por la fórmula (3).

Dividiendo el intervalo de integración en dos y sustituyendo en (4) la expresión de la función de Green a partir de (3), se obtiene

$$y(x) = \int_0^x \frac{\xi \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\, d\xi + \int_x^1 \frac{\xi \operatorname{sh} x \operatorname{sh}(\xi - 1)}{\operatorname{sh} 1}\, d\xi =$$
$$= \frac{\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \int_0^x \xi \operatorname{sh} \xi \, d\xi + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1} \int_x^1 \xi \operatorname{sh}(\xi - 1)\, d\xi. \tag{5}$$

Pero

$$\int_0^x \xi \operatorname{sh} \xi \, d\xi = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x,$$

$$\int_x^1 \xi \operatorname{sh}(\xi - 1)\, d\xi = 1 - x \operatorname{ch}(x-1) + \operatorname{sh}(x-1),$$

por lo que

$$y(x)=\frac{1}{\operatorname{sh} 1}\{\operatorname{sh}(x-1)[x \operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x]+$$
$$+\operatorname{sh} x[1-x \operatorname{ch}(x-1)+\operatorname{sh}(x-1)]\}=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}-x.$$

Aquí hemos aplicado la fórmula

$$\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta)=\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta,$$

así como también la no paridad de la función $\operatorname{sh} x$.

Por verificación directa se comprueba que la función

$$y(x)=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}-x$$

satisface a la ecuación (1) y a las condiciones de frontera (2).

Ejemplo 2. Reducir a una ecuación integral el siguiente problema de frontera para la ecuación diferencial no lineal:

$$y''=f(x, y(x)), \tag{1}$$
$$y(0)=y(1)=0. \tag{2}$$

Construyendo la función de Green para el problema

$$y''=0, \tag{3}$$
$$y(0)=y(1)=0, \tag{2}$$

se halla que

$$G(x, \xi)=\begin{cases}(\xi-1) x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ (x-1) \xi, & \xi \leqslant x \leqslant 1.\end{cases}$$

Considerando el segundo miembro de la ecuación (1) como una función conocida, se obtiene

$$y(x)=\int_0^1 G(x, \xi) f(\xi\, y(\xi))\, d\xi. \tag{4}$$

De este modo, la resolución del problema de frontera (1)—(2) se reduce a la resolución de una ecuación integral no lineal de Hammerstein (véase el § 15), cuyo núcleo es la función de Green del problema (3)—(2). La importancia de las ecuaciones integrales de Hammerstein reside, precisamente, en que la resolución de muchos problemas de frontera para ecuaciones diferenciales no lineales se reduce a la resolución de ecuaciones integrales de este tipo.

Resolver los problemas de frontera siguientes, aplicando la función de Green:

274. $y''+y=x;\ y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

275. $y^{IV}=1$; $y(0)=y'(0)=y''(1)=y'''(1)=0$.

276. $xy''+y'=x$; $y(1)=y(e)=0$.

277. $y''+\pi^2 y=\cos\pi x$; $y(0)=y(1)$, $y'(0)=y'(1)$.

278. $y''-y=2\operatorname{sh}1$; $y(0)=y(1)=0$.

279. $y''-y=2e^x$; $y(0)=y'(0)$, $y(1)+y'(1)=0$.

280. $y''+y=x^2$; $y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

§ 22. Problemas de frontera que contienen un parámetro y su reducción a ecuaciones integrales

En muchas investigaciones hay que considerar un problema de frontera de la forma

$$L[y]=\lambda y+h(x), \tag{1}$$

$$V_k(y)=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{2}$$

donde

$$L[y]\equiv p_0(x)\,y^{(n)}(x)+p_1(x)\,y^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)\,y(x),$$

$$V_k(y)\equiv \alpha_k y(a)+\alpha_k^{(1)}y'(a)+\ldots+\alpha_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(a)+$$
$$+\beta_k y(b)+\beta_k^{(1)}y'(b)+\ldots+\beta_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(b) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(las formas lineales $V_1, V_2, \ldots, V_n$ son linealmente independientes); $h(x)$ es una función continua dada de x; λ es cierto parámetro numérico.

Para $h(x)\equiv 0$ se obtiene el problema de frontera homogéneo

$$\left.\begin{aligned} &L[y]=\lambda y,\\ &V_k(y)=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Los valores de λ para los cuales el problema de frontera (3) posee soluciones no triviales $y(x)$, se llaman *valores propios del problema de frontera* (3), y dichas soluciones no triviales *funciones propias* correspondientes.

Teorema. *Si el problema de frontera*

$$\left.\begin{aligned} &L[y]=0,\\ &V_k(y)=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

tiene la función de Green $G(x,\xi)$, el problema de frontera (1)—(2) *es equivalente a la ecuación integral de Fredholm*

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+f(x), \tag{5}$$

donde

$$f(x)=\int_a^b G(x,\xi)\,h(\xi)\,d\xi. \qquad (6)$$

En particular, el problema de frontera homogéneo (3) es equivalente a la ecuación integral homogénea

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi. \qquad (7)$$

Observación. Como $G(x,\xi)$ es un núcleo continuo, a la ecuación integral se le puede aplicar la teoría de Fredholm. Por esto, la ecuación integral homogénea (7) puede tener no más de un conjunto numerable de raíces características $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, las cuales no poseen punto de acumulación finito. Para todos los valores de λ que no coinciden con las raíces características, la ecuación no homogénea (5) tiene solución para cualquier segundo miembro continuo $f(x)$. Dicha solución se da por la fórmula

$$y(x)=\lambda\int_a^b R(x,\xi;\lambda)\,f(\xi)\,d\xi+f(x), \qquad (8)$$

donde $R(x,\xi;\lambda)$ es la resolvente del núcleo $G(x,\xi)$. Además, para cualesquiera valores fijos de x y de ξ en $[a,b]$ la función $R(x,\xi;\lambda)$ es meromorfa en λ, y sus polos pueden ser solamente las raíces características de la ecuación integral homogénea (7).

Ejemplo. Reducir a una ecuación integral el problema de frontera siguiente:

$$y''+\lambda y=x, \qquad (1)$$

$$y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0. \qquad (2)$$

Resolución. Hallemos, primeramente, la función de Green $G(x,\xi)$ para el problema homogéneo correspondiente:

$$\left.\begin{array}{r} y''(x)=0, \\ y(0)=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Como las funciones $y_1(x)=x$ e $y_2(x)=x-\frac{\pi}{2}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación $y''(x)=0$ que satisfacen respectivamente a las condiciones $y(0)=0$ e $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, buscaremos la fun-

ción de Green en la forma

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{y_1(x)\,y_2(\xi)}{W(\xi)}, & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\[2mm] \dfrac{y_1(\xi)\,y_2(x)}{W(\xi)}, & \xi\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

donde

$$W(\xi)=\begin{vmatrix}\xi & \xi-\dfrac{\pi}{2}\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{\pi}{2}.$$

De este modo,

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\pi}\xi-1\right)x, & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\[2mm] \left(\dfrac{2}{\pi}x-1\right)\xi, & \xi\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\tag{4}$$

Seguidamente, utilizando la función de Green (4) como núcleo de la ecuación integral, para $y(x)$ obtenemos la siguiente ecuación integral:

$$y(x)=f(x)-\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi,$$

donde

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,\xi)\,\xi\,d\xi=\int_0^{x}\left(\frac{2x}{\pi}-1\right)\xi^2\,d\xi+$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2\xi}{\pi}-1\right)x\xi\,d\xi=\frac{1}{6}x^3-\frac{\pi^2}{24}x.$$

De este modo, el problema de frontera (1)—(2) ha sido reducido a la ecuación integral

$$y(x)+\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi=\frac{1}{6}x^3-\frac{\pi^2}{24}x.$$

Reducir a ecuaciones integrales los siguientes problemas de frontera:

281. $y''=\lambda y+x^2;\ y(0)=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0.$

282. $y'' = \lambda y + e^x$; $y(0) = y(1) = 0$.

283. $y'' + \frac{\pi^2}{2} y = \lambda y + \cos\frac{\pi x}{2}$; $y(-1) = y(1), y'(-1) = y'(1)$.

284. $y'' + \lambda y = 2x + 1$; $y(0) = y'(1)$, $y'(0) = y(1)$.

285. $y^{IV} = \lambda y + 1$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(1) = y'''(1) = 0$.

286. $y''' + \lambda y = 2x$; $y(0) = y(1) = 0$, $y'(0) = y'(1)$.

287. $y'' + \lambda y = e^x$; $y(0) = y'(0)$, $y(1) = y'(1)$.

§ 23. Ecuaciones integrales singulares

La ecuación integral

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

la llamaremos *singular*, si el intervalo de integración (a, b) es infinito, o el núcleo $K(x, t)$ no es integrable (por ejemplo, en el sentido de $L_2(\Omega)$).

Para las ecuaciones singulares pueden tener lugar fenómenos que no tienen análogo en el caso de un intervalo finito (a, b) y de un núcleo $K(x, t)$ „bueno" (continuo, o de $L_2(\Omega)$).

Así, si el núcleo $K(x, t)$ es continuo en Ω $\{a \leqslant x, t \leqslant b\}$ y a y b son finitos, el espectro de la ecuación integral, es decir, el conjunto de raíces características es discreto, y a cada raíz característica le corresponde un número finito de funciones propias linealmente independientes (las raíces características tienen multiplicidad finita).

En las ecuaciones integrales singulares el espectro puede ser continuo, o sea, las raíces características pueden cubrir intervalos enteros, y pueden ser raíces características de multiplicidad infinita.

Demostremos esto mediante ejemplos.

Consideremos la ecuación de Lalesco-Picard

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}\,\varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

El núcleo de esta ecuación $K(x, t) = e^{-|x-t|}$ posee norma infinita. En efecto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K^2(x, t)\,dx\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-t|}\,dx\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dx.$$

Si la función $\varphi(x)$ es derivable dos veces, la ecuación integral (2), que puede ser escrita en la forma

$$\varphi(x) = \lambda\left[e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{t}\,\varphi(t)\,dt + e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-t}\,\varphi(t)\,dt\right],$$

es equivalente a la ecuación diferencial

$$\varphi''(x)+(2\lambda-1)\varphi(x)=0. \tag{3}$$

La solución general de la ecuación (3) tiene la forma

$$\varphi(x)=C_1e^{rx}+C_2e^{-rx} \tag{4}$$

(C_1 y C_2 son constantes arbitrarias), donde

$$r=\sqrt{1-2\lambda}. \tag{5}$$

Aquí, para la existencia de la integral en el segundo miembro de (2) es necesario que $|\operatorname{Re} r|<1$, es decir, que λ sea mayor que cero para λ reales. Por consiguiente, en la región de los números reales el espectro de la ecuación (2) cubre el intervalo infinito $0<\lambda<+\infty$. Cada punto de dicho intervalo es una raíz característica de la ecuación (2) de multiplicidad 2. Sin embargo, las funciones propias correspondientes no pertenecen a la clase $L_2(-\infty, +\infty)$.

Para $\lambda>\frac{1}{2}$, las funciones propias, según (4), son sen $\sqrt{2\lambda-1}\,x$, $\cos\sqrt{2\lambda-1}\,x$; para $\lambda=\frac{1}{2}$, se obtiene $\varphi(x)=C_1+C_2x$. De este modo, para $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ existen funciones propias acotadas en $(-\infty, +\infty)$. Si, en cambio, la parte real de $\sqrt{1-2\lambda}$ es positiva y menor que la unidad, la fórmula (4), para cualesquiera constantes C_1 y C_2 $(C_1^2+C_2^2\neq 0)$, da una solución no acotada en $(-\infty, +\infty)$ de la ecuación integral (2).

En este ejemplo se ve el papel fundamental de la clase de funciones, en la cual se busca la solución de una ecuación integral.

Así, si se busca la solución de la ecuación (2) en la clase de funciones acotadas, entonces, como hemos visto, todos los valores $\lambda>\frac{1}{2}$ son raíces características.

Si, en cambio, la solución de la ecuación (2) se busca en la clase de funciones $L_2(-\infty, +\infty)$, para cualquier valor de λ la ecuación (2) tiene sólo solución trivial: $\varphi(x)\equiv 0$, es decir, para las soluciones de $L_2(-\infty, +\infty)$ ningún valor de λ es característico.

Sea $F(x)$ una función continua, absolutamente integrable en $[0, +\infty]$, que tenga un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito del eje OX.

Escribamos la transformación coseno de Fourier de esta función:

$$F_1(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F(x)\cos\lambda x\,dx.$$

Entonces

$$F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F_1(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda.$$

Sumando ambas fórmulas, obtenemos que

$$F_1(x)+F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}[F_1(t)+F(t)]\cos xt\,dt,$$

es decir, para cualquier función $F(x)$ que satisfaga a las condiciones indicadas más arriba, la función $\varphi(x)=F_1(x)+F(x)$ es función propia de la ecuación integral

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{+\infty}\varphi(t)\cos xt\,dt, \tag{6}$$

que corresponde al valor característico $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Como $F(x)$ es una función arbitraria, la ecuación (6) tiene infinitas funciones propias linealmente independientes para dicho valor de λ.

Esta particularidad de la ecuación (6) está ligada con el hecho de que ésta es singular (el intervalo de integración en (6) es infinito).

E j e m p l o. Consideremos la ecuación integral

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{\infty}\varphi(t)\cos xt\,dt \tag{7}$$

y tomemos

$$F(x)=e^{-ax} \qquad (a>0).$$

Entonces

$$F_1(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-at}\cos xt\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2}.$$

Ahora

$$\varphi(x)=F(x)+F_1(x)=e^{-ax}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2}. \tag{8}$$

Sustituyendo $\varphi(x)$ en la ecuación (7), tendremos

$$e^{-ax}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2}=\lambda\left[\int_0^{\infty}e^{-at}\cos xt\,dt+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{a\cos xt}{a^2+t^2}\,dt\right]. \tag{9}$$

Como ya fue indicado,

$$\int_0^{\infty}e^{-at}\cos xt\,dt=\frac{a}{a^2+x^2}.$$

La segunda integral del segundo miembro de (9) puede ser hallada aplicando el teorema de Cauchy sobre los residuos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{a^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2a}\,e^{-ax}.$$

De esta manera, de (9) obtenemos

$$a^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2} = \lambda\left[\frac{a}{a^2+x^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-ax}\right]. \qquad (10)$$

De aquí se ve que, si $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, la función

$$\varphi(x) = e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2} \neq 0$$

será solución de la ecuación integral (7). Por lo tanto, $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ es una raíz característica de la ecuación (7), y la función

$$\varphi(x) = e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2} \qquad (8)$$

es una función propia correspondiente; además, por cuanto $a > 0$ es un número cualquiera, a la raíz característica $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ le corresponde un número infinito de funciones propias (8) linealmente independientes.

Análogamente se puede demostrar que la ecuación (7) posee la raíz característica $\lambda = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, a la cual le corresponden las funciones propias

$$e^{-ax} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2} \qquad (a > 0).$$

288. Demostrar que la ecuación integral

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} \varphi(t) \operatorname{sen} xt\,dt$$

tiene las raíces características $\lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ de multiplicidad infinita, y hallar las funciones propias correspondientes.

289. Demostrar que la ecuación integral con el núcleo de Haenkel

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} J_{\nu}\left(2\sqrt{xt}\right)\varphi(t)\,dt$$

(donde $J_\nu(z)$, es la función de Bessel de primera especie de orden ν) tiene las raíces características $\lambda = \pm 1$ de multiplicidad infinita, y hallar las funciones propias respectivas.

290. Demostrar que para la ecuación integral

$$\varphi(x) = \lambda \int_x^\infty \frac{(t-x)^n}{n!} \varphi(t)\,dt$$

cualquier número λ, para el cual uno de los valores de $\sqrt[n+1]{\lambda}$ tiene parte real positiva, es una raíz característica.

291. Demostrar que la ecuación integral de Volterra

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right) \varphi(t)\,dt$$

tiene un conjunto infinito de raíces características $\lambda = \xi + i\eta$, donde el punto (ξ, η) se encuentra fuera de la parábola $\xi + \eta^2 = 0$.

Resolución de algunas ecuaciones integrales singulares mediante el teorema de Efros (teorema generalizado del producto).

Sean

$$\varphi(x) \doteqdot \Phi(p)$$
$$u(x, \tau) \doteqdot U(p)\,e^{-\tau q(p)},$$

siendo $U(p)$ y $q(p)$ funciones analíticas. Entonces

$$\Phi(q(p))\,U(p) \doteqdot \int_0^\infty \varphi(\tau)\,u(x, \tau)\,d\tau. \quad (1)$$

Este es el **teorema generalizado del producto (teorema de Efros)**. Si $u(x, \tau) = u(x-\tau)$, entonces $q(p) \equiv p$, y se obtiene el teorema común del producto:

$$\Phi(p) \cdot U(p) \doteqdot \int_0^\infty \varphi(\tau)\,u(x-\tau)\,d\tau.$$

Si $U(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p) = \sqrt{p}$, entonces

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\,e^{-\frac{\tau^2}{4x}}. \quad (2)$$

Por esto, si se sabe que $\Phi(p) \doteqdot \varphi(x)$, por el teorema de Efros se halla la función objeto para $\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$:

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty \varphi(\tau)\, e^{-\frac{\tau^2}{4x}}\, d\tau. \tag{3}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación integral

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \varphi(t)\, dt = 1. \tag{4}$$

Resolución. Sea $\varphi(x) \doteqdot \Phi(p)$. Aplicando a ambos miembros de (4) la transformación de Laplace, de acuerdo con la fórmula (3), se obtiene:

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p},$$

de donde

$$\frac{\Phi(p)}{p} = \frac{1}{p^2}, \quad \text{ó} \quad \Phi(p) = \frac{1}{p} \doteqdot 1.$$

Por consiguiente, $\varphi(x) = 1$ es la solución de la ecuación (4).

Resolver las siguientes ecuaciones integrales:

292. $\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \varphi(t)\, dt = e^{-x}$.

293. $\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \varphi(t)\, dt = 2x - \operatorname{sh} x$.

294. $\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \varphi(t)\, dt = x^{\frac{3}{2}} + e^{4x}$.

Es sabido que

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

donde $J_n(z)$ es la función de Bessel de primera especie de orden n. En particular,

$$J_0(2\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}.$$

En virtud del teorema de semejanza

$$J_0(2\sqrt{xt}) \doteqdot \frac{1}{p}e^{-\frac{x}{p}},$$

de donde se ve que para el teorema de Efros debe tomarse en este caso

$$q(p)=\frac{1}{p}.$$

E j e m p l o. Resolver la ecuación integral

$$\varphi(x)=xe^{-x}+\lambda\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{xt})\,\varphi(t)\,dt \quad (|\lambda| \neq 1). \tag{5}$$

R e s o l u c i ó n. Sea $\varphi(x) \doteqdot \Phi(p)$. Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de (5) y teniendo en cuenta el teorema de Efros, hallamos

$$\Phi(p)=\frac{1}{(p+1)^2}+\lambda\frac{1}{p}\,\Phi\left(\frac{1}{p}\right). \tag{6}$$

Sustituyendo p por $\frac{1}{p}$, se obtiene

$$\Phi\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{p^2}{(p+1)^2}+\lambda p\Phi(p). \tag{7}$$

De (6) y (7) se halla que

$$\Phi(p)=\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{\lambda}{p}\left[\frac{p^2}{(p+1)^2}+\lambda p\Phi(p)\right]$$

o bien

$$\Phi(p)=\frac{1}{1-\lambda^2}\left[\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{\lambda p}{(p+1)^2}\right].$$

De aquí que

$$\varphi(x)=e^{-x}\left(\frac{x}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\right).$$

Resolver las ecuaciones integrales siguientes ($\lambda \neq \pm 1$):

295. $\varphi(x)=e^x+\lambda\int_0^{\infty}\sqrt{\frac{x}{t}}\,J_1(2\sqrt{xt})\,\varphi(t)\,dt.$

296. $\varphi(x)=\cos x+\lambda\int_0^{\infty}J_0(2\sqrt{xt})\,\varphi(t)\,dt.$

297. $\varphi(x)=\cos x+\lambda\int_0^{\infty}\frac{x}{t}\,J_2(2\sqrt{xt})\,\varphi(t)\,dt.$

298. $\varphi(x) = \operatorname{sen} x + \lambda \int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{x}{t}}\, J_1(2\sqrt{xt})\, \varphi(t)\, dt.$

Resolución de ciertas ecuaciones integrales singulares mediante la transformación de Mellin.

Sea la función $f(t)$ definida para t positivas, y supongamos que satisface a las condiciones

$$\int\limits_0^1 |f(t)|\, t^{\sigma_1 - 1}\, dt < +\infty, \quad \int\limits_0^\infty |f(t)|\, t^{\sigma_2 - 1}\, dt < +\infty \tag{1}$$

para σ_1 y σ_2 elegidas de forma adecuada. Se llama *transformación de Mellin* de la función $f(t)$ a la función

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)\, t^{s-1}\, dt \qquad (s = \sigma + i\tau, \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_2). \tag{2}$$

La fórmula de inversión de la transformación de Mellin es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)\, t^{-s}\, ds \qquad (t > 0, \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_2), \tag{3}$$

donde la integral se toma a lo largo de la recta l: $\operatorname{Re} s = \sigma$, paralela al eje imaginario del plano de s, y se entiende en el sentido del valor principal. En el caso en que el comportamiento de la función $f(t)$ para $t \to 0$ y $t \to \infty$ sea conocido, por ejemplo, por consideraciones de carácter físico, las fronteras de la banda (σ_1, σ_2) se pueden establecer partiendo de las condiciones de convergencia absoluta de la integral (2). Si, en cambio, la conducta de $f(t)$ se conoce sólo en un extremo del intervalo $(0, +\infty)$, por ejemplo, para $t \to 0$, entonces se determina solamente σ_1; la recta de integración l en (3) debe tomarse a la derecha de la recta $\sigma = \sigma_1$ y a la izquierda del punto singular más próximo de la función $F(s)$.

La transformación de Mellin está estrechamente ligada con la de Fourier y la de Laplace, y muchos teoremas que se refieren a la primera pueden ser obtenidos de los teoremas respectivos para las transformaciones de Fourier y de Laplace mediante cambio de variables.

El teorema de la convolución para la transformación de Mellin tiene la forma siguiente:

$$M\left\{\int\limits_0^\infty f(t)\, \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}\right\} = F(s) \cdot \Phi(s). \tag{4}$$

De aquí se puede concluir que la transformación de Mellin facilita la

resolución de las ecuaciones integrales del tipo

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^\infty K\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}. \tag{5}$$

En efecto, supongamos que las funciones $\varphi(x)$, $f(x)$ y $K(x)$ permiten transformada de Mellin, y sean $\varphi(x)\to\Phi(s)$, $f(x)\to F(s)$, $K(x)\to\tilde{K}(s)$; además, las regiones en que las funciones $F(s)$ y $\tilde{K}(s)$ son analíticas tienen una banda común $\sigma_1<\operatorname{Re} s=\sigma<\sigma_2$. Aplicando la transformación de Mellin a ambos miembros de la ecuación (5) y utilizando el teorema (4) sobre la convolución, se obtiene

$$\Phi(s)=F(s)+\tilde{K}(s)\cdot\Phi(s), \tag{6}$$

de donde

$$\Phi(s)=\frac{F(s)}{1-\tilde{K}(s)}\quad(\tilde{K}(s)\neq 1). \tag{7}$$

Esta es la solución operacional de la ecuación integral (5). La solución $\varphi(x)$ de esta ecuación se halla por la fórmula de inversión (3):

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(s)}{1-\tilde{K}(s)}x^{-s}\,ds. \tag{8}$$

Consideremos la ecuación integral

$$\varphi(x)=e^{-\alpha x}+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{t}}\varphi(t)\frac{dt}{t}\quad(\alpha>0). \tag{9}$$

Apliquemos la transformación de Mellin a ambos miembros de (9). Se tiene

$$M\{e^{-\alpha x}\}=\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{s-1}\,dx=\alpha^{-s}\int_0^\infty e^{-z}z^{s-1}\,dz=\frac{\Gamma(s)}{\alpha^s}=F(s),$$

$$M\left\{\frac{1}{2}e^{-x}\right\}=\frac{1}{2}\Gamma(s)=\tilde{K}(s)\quad(\operatorname{Re} s>0),$$

de forma que las regiones en que $F(s)$ y $\tilde{K}(s)$ son analíticas coinciden. La ecuación operacional correspondiente a la (9) tendrá la forma

$$\Phi(s)=\frac{\Gamma(s)}{\alpha^s}+\frac{1}{2}\Gamma(s)\cdot\Phi(s), \tag{10}$$

de donde

$$\Phi(s)=\frac{\Gamma(s)}{\alpha^s\left[1-\frac{1}{2}\Gamma(s)\right]}.$$

Según la fórmula de inversión (8), hallamos que

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{1-\frac{1}{2}\Gamma(s)}\frac{ds}{(\alpha x)^s}\ (\sigma>0). \tag{11}$$

La integral (11) se halla mediante la fórmula integral de Cauchy.

Para $\alpha x>1$ incluimos en el contorno de integración una semicircunferencia situada en el semiplano derecho. En este caso, la única particularidad de la función subintegral se encuentra en el punto $s=3$, en el cual

$$1-\frac{1}{2}\Gamma(s)=0.$$

Entonces

$$\varphi(x)=\frac{2}{(\alpha x)^3\,\Psi(3)},\quad \alpha x>1,$$

siendo $\Psi(3)$ la derivada logarítmica de la función Gamma en el punto $s=3$:

$$\Psi(3)=\frac{\Gamma'(3)}{\Gamma(3)}=\frac{3}{2}-\gamma$$

(γ es la constante de Euler).

Para $\alpha x<1$, las particularidades de la función subintegral están en las raíces negativas de la función $1-\frac{1}{2}\Gamma(s)$, de forma que

$$\varphi(x)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha x)^{s_k}\,\Psi(s_k)},\qquad \alpha x<1,$$

donde $\Psi(s_k)$ son los valores de la derivada logarítmica de $\Gamma(s)$ en los puntos $s=s_k$ $(k=1, 2, \ldots)$. De este modo,

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{(3-2\gamma)(\alpha x)^3}, & \alpha x>1,\\ -2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha x)^{s_k}\,\Psi(s_k)}, & \alpha x<1.\end{cases}$$

Estudiemos la ecuación integral de la forma

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^{\infty}K(x\cdot t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

(ecuación de Foks). Multiplicando ambos miembros de (1) por x^{s-1} e integrando con respecto a x desde 0 hasta ∞, se obtiene

$$\int_0^\infty \varphi(x)\, x^{s-1}\, dx = \int_0^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx + \int_0^\infty \varphi(t)\, dt \int_0^\infty K(x \cdot t) \cdot x^{s-1}\, dx.$$

Designando la transformada de Mellin de las funciones $\varphi(x)$, $f(x)$, $K(x)$ por $\Phi(s)$, $F(s)$, y $\tilde{K}(s)$ respectivamente, después de transformaciones sencillas, obtenemos:

$$\Phi(s) = F(s) + \tilde{K}(s) \int_0^\infty \varphi(t)\, t^{-s}\, dt. \tag{2}$$

Es fácil ver que $\int_0^\infty \varphi(t)\, t^{-s}\, dt = \Phi(1-s)$, de manera que (2) escribe en la forma

$$\Phi(s) = F(s) + \Phi(1-s)\, \tilde{K}(s). \tag{3}$$

Sustituyendo s por $1-s$ en la igualdad (3) se obtiene

$$\Phi(1-s) = F(1-s) + \Phi(s)\, \tilde{K}(1-s). \tag{4}$$

De las igualdades (3) y (4) hallamos que

$$\Phi(s) = F(s) + F(1-s)\, \tilde{K}(s) + \Phi(s)\, \tilde{K}(s)\, \tilde{K}(1-s),$$

de donde

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + F(1-s)\, \tilde{K}(s)}{1 - \tilde{K}(s) \cdot \tilde{K}(1-s)}. \tag{5}$$

Esta es la solución operacional de la ecuación (1).

Por la fórmula de inversión de Mellin se halla que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(s) + F(1-s)\, \tilde{K}(s)}{1 - K(s)\, \tilde{K}(1-s)}\, x^{-s}\, ds \tag{6}$$

es la solución de la ecuación integral (1).

E j e m p l o. Resolver la ecuación integral

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(t) \cos xt\, dt. \tag{7}$$

R e s o l u c i ó n. Tenemos que

$$\tilde{K}(s) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^{s-1} \cos x\, dx. \tag{8}$$

Para calcular la integral (8) utilizaremos la igualdad

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx = \Gamma(z). \tag{9}$$

Girando en la fórmula (9) el rayo de integración hasta que coincida con el eje imaginario, lo cual, en virtud del lema de Jordan, es posible para $0 < z < 1$, se llega a la fórmula

$$\int_0^\infty e^{-ix} x^{z-1}\, dx = e^{-\frac{i\pi z}{2}}\Gamma(z).$$

Separando las partes real e imaginaria, se obtiene

$$\int_0^\infty x^{z-1}\cos x\, dx = \cos\frac{\pi z}{2}\cdot\Gamma(z), \tag{10}$$

$$\int_0^\infty x^{z-1}\operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen}\frac{\pi z}{2}\cdot\Gamma(z). \tag{11}$$

De esta manera, en virtud de (8) y de (10),

$$\tilde{K}(s) = (\lambda)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}. \tag{12}$$

Ahora

$$\tilde{K}(s)\cdot\tilde{K}(1-s) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma\cdot(1-s)\operatorname{sen}\frac{\pi s}{2} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\pi}\, 2\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s) = \lambda^2,$$

puesto que $\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi s}$. Por lo tanto, si $M\{f(x)\} = F(s)$, entonces, en virtud de la fórmula (5) (para $|\lambda| \neq 1$),

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + F(1-s)\tilde{K}(s)}{1-\lambda^2},$$

por lo que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i(1-\lambda^2)}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[F(s) + F(1-s)\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(s)\cdot\cos\frac{\pi s}{2}\right]x^{-s}ds =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda^2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\, x^{-s}\, ds +$$

$$+ \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\, F(1-s)\, x^{-s}\, ds. \tag{13}$$

Sustituyamos $F(1-s)$ por $\int_0^\infty f(t)\, t^{-s}\, dt$ en la segunda integral **del** segundo miembro de (13); entonces, como

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\, x^{-s}\, ds = f(x)$, la fórmula (13) se esrcibe así:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{1-\lambda^2}+\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\cos\times$$

$$\times\frac{\pi s}{2}(xt)^{-s}\, ds\int_0^\infty f(t)\, dt. \qquad \textbf{(14)}$$

Según la fórmula de inversión de Mellin

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}(xt)^{-s}\, ds=\cos xt,$$

de modo que, en definitiva,

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{1-\lambda^2}+\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos xt\, dt. \qquad (|\lambda|\neq 1).$$

Resolver las siguientes ecuaciones integrales:

299. $\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varphi(t)\cos xt\, dt.$

300. $\varphi(x)=f(x)+\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi(t)\,\mathrm{sen}\, xt\, dt.$

301. $\varphi(x)=-e^{-x}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varphi(t)\cos xt\, dt.$

CAPITULO III

METODOS APROXIMADOS

§ 24. Métodos aproximados de resolución de las ecuaciones integrales

1. Sustitución del núcleo por uno degenerado. Sea dada la ecuación integral

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (1)$$

con núcleo $K(x, t)$ arbitrario. La sencillez de la resolución de las ecuaciones con núcleo degenerado (véase el § 15) nos sugiere naturalmente, la idea de sustituir el núcleo arbitrario $K(x, t)$ aproximadamente por uno degenerado $L(x, t)$, y tomar la solución $\tilde{\varphi}(x)$ de la nueva ecuación

$$\tilde{\varphi}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b L(x, t)\,\tilde{\varphi}(t)\,dt \qquad (2)$$

como aproximación de la solución de la ecuación inicial (1). En calidad de núcleo degenerado $L(x, t)$, próximo al dado $K(x, t)$, se puede tomar un segmento de la serie de Taylor paro la función $K(x, t)$, un segmento de la serie de Fourier para $K(x, t)$ por cualquier sistema de funciones $\{u_n(x)\}$ ortonormal y completo en $L_2(a, b)$, etc. Indiquemos algunas apreciaciones de los errores de la solución de (1) que surgen a causa de sustituir el núcleo dado por uno degenerado.

Sean dados dos núcleos $L(x, t)$ y $K(x, t)$, y supongamos que

$$\int_a^b |K(x, t)-L(x, t)|\,dt < h$$

y que la resolvente $R_L(x, t;\ \lambda)$ de la ecuación con núcleo $L(x, t)$ satisface a la desigualdad

$$\int_a^b |R_L(x, t;\ \lambda)|\,dt < R,$$

así como también que $|f(x)-f_1(x)| < \eta$. Entonces, si se cumple la condición

$$1-|\lambda|\,h\,(1+|\lambda|\,R) > 0,$$

la ecuación

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt+f(x)$$

tiene una solución única $\varphi(x)$, y la diferencia entre ésta y la solución $\tilde{\varphi}(x)$ de la ecuación

$$\tilde{\varphi}(x)=f_1(x)+\lambda\int_a^b L(x,\ t)\,\tilde{\varphi}(t)\,dt$$

no supera a

$$|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|<\frac{N\,|\lambda|\,(1+|\lambda|\,R)^2\,h}{1-|\lambda|\,h\,(1+|\lambda|\,R)}+\eta, \tag{3}$$

siendo N el extremo superior de $|f(x)|$.

Obsérvese que para un núcleo degenerado $L(x,\ t)$ la resolvente $R_L(x,\ t;\ \lambda)$ se halla de forma sencilla (salvo el cálculo de las integrales); precisamente, si $L(x,\ t)=\sum_{k=1}^{n}X_k(x)\,T_k(t)$, entonces, haciendo

$$\int_a^b X_k(x)\,T_s(x)\,dx=a_{sk},$$

se obtiene que

$$R_L(x,\ t;\ \lambda)=\frac{D(x,\ t;\ \lambda)}{D(\lambda)}, \tag{4}$$

donde

$$D(x,\ t;\ \lambda)=\begin{vmatrix} 0 & X_1(x) & \dots & X_n(x)\\ T_1(t) & 1-\lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ T_n(t) & -\lambda a_{n1} & \dots & 1-\lambda a_{nn}\end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n}\\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn}\end{vmatrix}. \tag{6}$$

Las raíces de $D(\lambda)$ son las raíces características del núcleo $L(x,\ t)$.

Escribamos otra apreciación ($\lambda=1$). Sea

$$K(x,\ t)=L(x,\ t)+\Lambda(x,\ t), \tag{7}$$

donde $L(x,\ t)$ es un núcleo degenerado, y $\Lambda(x,\ t)$ tiene norma pequeña en cierta métrica. Sean, además, $R_K(x,\ t)$, $R_L(x,\ t)$ las resolventes de los núcleos $K(x,\ t)$, $L(x,\ t)$ respectivamente, y $\|\Lambda\|$, $\|R_K\|$, $\|R_L\|$, las normas de los operadores con los núcleos respectivos. Entonces

$$\|\varphi-\tilde{\varphi}\|\leqslant\|\Lambda\|\,(1+\|R_K\|)\,(1+\|R_L\|)\,\|f\|, \tag{8}$$

pudiéndose tomar la norma en la fórmula (8) en cualquier espacio funcional. Para la norma de la resolvente R de cualquier núcleo

$K(x, t)$ es válida la acotación

$$\|R\| \leqslant \frac{\|K\|}{1-|\lambda|\cdot\|K\|}. \tag{9}$$

Aquí en la espacio $C(0, 1)$ de funciones continuas en el segmento $[0, 1]$ es

$$\|K\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant t} \int_0^1 |K(x, t)|\, dt,$$

$$\|f\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|. \tag{10}$$

En el espacio de funciones de cuadrado sumable $\Omega\{a \leqslant x, t \leqslant b\}$,

$$\|K\| \leqslant \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt\right)^{1/2},$$

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$\varphi(x) = \operatorname{sen} x + \int_0^1 (1 - x \cos xt)\, \varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

sustituyendo su núcleo por uno degenerado.

Resolución. Desarrollando en serie el núcleo $K(x, t) = 1 - x \cos xt$, se obtiene

$$K(x, t) = 1 - x + \frac{x^3t^2}{2} - \frac{x^5t^4}{24} + \ldots \tag{2}$$

Tomemos como núcleo degenerado $L(x, t)$ los tres primeros términos del desarrollo (2):

$$L(x, t) = 1 - x + \frac{x^3t^2}{2}, \tag{3}$$

y resolvamos la nueva ecuación

$$\tilde{\varphi}(x) = \operatorname{sen} x + \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3t^2}{2}\right) \tilde{\varphi}(t)\, dt. \tag{4}$$

De (4) se obtiene

$$\tilde{\varphi}(x) = \operatorname{sen} x + C_1(1-x) + C_2x^3, \tag{5}$$

donde

$$C_1 = \int_0^1 \tilde{\varphi}(x)\, dt, \qquad C_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\tilde{\varphi}(t)\, dt. \tag{6}$$

Sustituyendo (5) en (6), obtenemos un sistema para la determinación de C_1 y C_2.

Se tiene:

$$C_1 = \int_0^1 [\operatorname{sen} t + C_1 (1-t) + C_2 t^3]\, dt = \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{4} C_2 + 1 - \cos 1,$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 [t^2 \operatorname{sen} t + C_1 (t^2 - t^3) + C_2 t^5]\, dt =$$

$$= \frac{1}{24} C_1 + \frac{1}{12} C_2 + \operatorname{sen} 1 - 1 + \frac{1}{2} \cos 1$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{4} C_2 &= 1 - \cos 1, \\ -\frac{1}{24} C_1 + \frac{11}{12} C_2 &= \operatorname{sen} 1 + \frac{1}{2} \cos 1 - 1. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Resolviendo este sitema, se halla que

$$C_1 = 1{,}0031, \qquad C_2 = 0{,}1674,$$

y entonces

$$\tilde{\varphi}(x) = 1{,}0031\,(1-x) + 0{,}1674 x^3 + \operatorname{sen} x.$$

La solución exacta de la ecuación es $\varphi(x) \equiv 1$.

Acotemos ahora $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|$ según la fórmula

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\| \leqslant \|\Lambda\| (1 + \|R_K\|)(1 + \|R_L\|) \|f\|. \qquad (8)$$

En la métrica del espacio L_2 se obtiene

$$\|\Lambda\| \leqslant \frac{1}{24} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 x^{10} t^8\, dx\, dt \right\}^{1/2} = \frac{1}{72 \sqrt{11}} < \frac{1}{238},$$

$$\|K\| \leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (1 - x \cos xt)^2\, dx\, dt \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ 2 \cos 1 - \frac{1}{8} \cos 2 + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2 - \frac{5}{6} \right\}^{1/2} < \frac{3}{5},$$

$$\|L\| \leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3 t^2}{2}\right)^2 dx\, dt \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{5}{14}} < \frac{3}{5},$$

$$\|f\| = \left\{ \int_0^1 \operatorname{sen}^2 x\, dx \right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{2 - \operatorname{sen} 2}}{2} < \frac{3}{5}.$$

Las normas de las resolventes R_K y R_L se aprecian mediante las fórmulas

$$\|R_K\| \leqslant \frac{\|K\|}{1-|\lambda|\cdot\|K\|}, \quad \|R_L\| \leqslant \frac{\|L\|}{1-|\lambda|\cdot\|L\|},$$

donde $|\lambda|=1$. De aquí que $\|R_K\| \leqslant \frac{3}{2}$, $\|R_L\| \leqslant \frac{3}{2}$, y entonces

$$\|\varphi-\tilde{\varphi}\| < \frac{1}{238}\left(1+\frac{3}{2}\right)\left(1+\frac{3}{2}\right)\frac{3}{5} < 0{,}016.$$

Hallar la solución de la ecuación integral sustituyendo el núcleo por uno degenerado y dar una apreciación del error:

302. $\varphi(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xt}-1)\varphi(t)\,dt.$

303. $\varphi(x) = x + \cos x + \int_0^1 x(\operatorname{sen} xt - 1)\varphi(t)\,dt.$

304. $\varphi(x) = \frac{1}{2}(e^{-x}+3x-1) + \int_0^1 (e^{-xt^2}-1)\,x\varphi(t)\,dt.$

305. $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \int_0^1 (1-\cos xt^2)\,x\varphi(t)\,dt.$

2. Método de las aproximaciones sucesivas. El método de las aproximaciones sucesivas (método iterativo) consiste en lo siguiente.

Sea dada la ecuación integral

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{1}$$

Formemos la sucesión de funciones $\{\varphi_n(x)\}$ mediante la fórmula de recurrencia

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi_{n-1}(t)\,dt. \tag{2}$$

Las funciones $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ se consideran como aproximaciones a la solución buscada de la ecuación; la aproximación nula $\varphi_0(x)$ se puede escoger arbitrariamente.

En las condiciones conocidas

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt}, \qquad (3)$$

la sucesión (2) converge hacia la solución de la ecuación (1). La magnitud del error de la aproximación $(m+1)$-ésima se determina por desigualdad

$$|\varphi(x) - \varphi_{m+1}(x)| \leqslant F \cdot C_1 \cdot B^{-1} \cdot \frac{|\lambda B|^{m+1}}{1 - |\lambda B|} + \Phi C_1 B^{-1} |\lambda B|^{m+1}, \qquad (4)$$

donde

$$F = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}, \quad \Phi = \sqrt{\int_a^b \varphi_0^2(x)\, dx},$$

$$C_1 = \sqrt{\max_{a \leqslant x \leqslant b} \int_a^b K^2(x, t)\, dt}.$$

Resolver las siguientes ecuaciones por el método de las aproximaciones sucesivas:

306. $\varphi(x) = 1 + \int_0^1 xt^2 \varphi(t)\, dt.$

307. $\varphi(x) = \frac{5}{6} x + \frac{1}{2} \int_0^1 xt \varphi(t)\, dt.$

308. Hallar la tercera aproximación $\varphi_3(x)$ de la solución de la ecuación integral

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

donde

$$K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geqslant t, \\ x, & x \leqslant t, \end{cases}$$

y apreciar el error.

Señalemos que la dificultad principal para la aplicación del método de las aproximaciones sucesivas consiste en el cálculo de las integrales en las fórmulas (2). Este debe efectuarse, por regla general, aplicando las fórmulas de integración aproximada. Por esto, aquí también es conveniente sustituir el núcleo dado por uno degenerado mediante el desarrollo en serie de Taylor, y después introducir el método iterativo.

3. Método de Bubnov-Galiorkin. La solución aproximada de la ecuación integral

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (1)$$

por el método de Bubnov-Galiorkin se busca así. Escojamos un sistema de funciones $\{u_n(x)\}$, completo en $L_2(a,\ b)$, tal que para cualquier n las funciones $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x)$ sean linealmente independientes, y busquemos la solución aproximada $\varphi_n(x)$ en la forma

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x). \qquad (2)$$

Los coeficientes a_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ se determinan del siguiente sistema lineal:

$$(\varphi_n(x),\ u_k(x))=(f(x),\ u_k(x))+\lambda\left(\int_a^b K(x,\ t)\,\varphi_n(t)\,dt,\ u_k(x)\right) \qquad (3)$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

donde $(f,\ g)$ significa que $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$, y en lugar de $\varphi_n(x)$ hay que poner $\sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$. Si el valor de λ en (1) no es característico, para n suficientemente grandes, el sistema (3) tiene solución única, y para $n\longrightarrow\infty$, la solución aproximada $\varphi_n(x)$ (2) tiende en la métrica de $L_2(a,\ b)$ hacia la solución exacta $\varphi(x)$ de la ecuación (1).

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$\varphi(x)=x+\int_{-1}^{1} xt\,\varphi(t)\,dt \qquad (4)$$

por el método de Bubnov-Galiorkin.

Resolución. Tomemos como sistema completo de funciones en $[-1,\ 1]$ el sistema de polinomios de Legendre $P_n(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. La solución aproximada $\varphi_n(x)$ de la ecuación (4) la buscaremos en la forma

$$\varphi_3(x)=a_1\cdot 1+a_2x+a_3\,\frac{3x^2-1}{2}.$$

Sustituyendo $\varphi_3(x)$ en lugar de $\varphi(x)$ en la ecuación (4), tendremos

$$a_1+a_2x+a_3\,\frac{3x^2-1}{2}=x+\int_{-1}^{1} xt\left(a_1+a_2t+a_3\,\frac{3t^2-1}{2}\right)dt$$

o bien

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = x + x\frac{2}{3} a_2. \qquad (5)$$

Multiplicando ambos miembros de (5) sucesivamente por 1, x, $\frac{3x^2-1}{2}$ e integrando respecto a x desde -1 hasta 1, se halla:

$$2a_1 = 0,$$
$$\frac{2}{3} a_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} a_2,$$
$$\frac{2}{5} a_3 = 0.$$

De aquí se obtiene $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, por lo que $\varphi_3(x) = 3x$. No es difícil comprobar que ésta es la solución exacta de la ecuación (4).

Resolver, por el método de Bubnov-Galiorkin, las ecuaciones integrales siguientes:

309. $\varphi(x) = 1 + \int_{-1}^{1} (xt + x^2)\,\varphi(t)\,dt.$

310. $\varphi(x) = 1 + \frac{4}{3} x + \int_{-1}^{1} (xt^2 - x)\,\varphi(t)\,dt.$

311. $\varphi(x) = 1 - x(e^x - e^{-x}) + \int_{-1}^{1} x^2 e^{xt}\,\varphi(t)\,dt.$

Observación. Para los núcleos degenerados, el método de Bubnov-Galiorkin da la solución exacta, y para el caso general, éste es equivalente a la sustitución del núcleo $K(x, t)$ por uno degenerado $L(x, t)$.

§ 25. Métodos aproximados de determinación de las raíces características

1. Método de Ritz. Sea dada la ecuación integral

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt$$

con núcleo simétrico $K(x, t) \equiv K(t, x)$.

Tomemos una sucesión de funciones $\{\Psi_n(x)\}$, $\Psi_n(x) \in L_2(a, b)$ tal, que el sistema $\{\Psi_n(x)\}$ sea completo en $L_2(a, b)$ y que para cualquier n las funciones $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, ..., $\Psi_n(x)$ sean linealmente independien-

tes en $[a, b]$. Hagamos

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \Psi_k(x), \tag{1}$$

y sometamos los coeficientes a_k a la condición $\|\varphi_n\| = 1$. Con esta condición busquemos los valores estacionarios de la forma cuadrática

$$(K\varphi_n, \varphi_n).$$

Así se llega a un sistema lineal homogéneo con respecto a los coeficientes a_k (σ es el factor de Lagrange):

$$\sum_{k=1}^{n} \{(K\Psi_j, \Psi_k) - \sigma(\Psi_j, \Psi_k)\} a_k = 0 \tag{2}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Para la existencia de una solución no nula de (2), el determinante del sistema (2) debe ser igual a cero:

$$\begin{vmatrix} (K\psi_1, \psi_1) - \sigma(\psi_1, \psi_1) & (K\psi_1, \psi_2) - \sigma(\psi_1, \psi_2) & \ldots & (K\psi_1, \psi_n) - \sigma(\psi_1, \psi_n) \\ (K\psi_2, \psi_1) - \sigma(\psi_2, \psi_1) & (K\psi_2, \psi_2) - \sigma(\psi_2, \psi_2) & \ldots & (K\psi_2, \psi_n) - \sigma(\psi_2, \psi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (K\psi_n, \psi_1) - \sigma(\psi_n, \psi_1) & (K\psi_n, \psi_2) - \sigma(\psi_n, \psi_2) & \ldots & (K\psi_n, \psi_n) - \sigma(\psi_n, \psi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Las raíces de la ecuación (3) dan los valores aproximados de los valores propios del núcleo $K(x, t)$. La mayor de las raíces de la ecuación (1) da el valor aproximado por defecto del mayor valor propio. Hallando σ de (3) y sustituyéndolo en (2) se busca una solución no nula a_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) del sistema (2). Poniendo los valores hallados de a_k en (1) se obtiene la expresión aproximada de una función propia que corresponde al valor propio hallado.

Ejemplo. Hallar, por el método de Ritz, el valor aproximado de la menor raíz característica del núcleo

$$K(x, t) = xt; \qquad a = 0, \ b = 1.$$

Resolución. Como sistema coordenado de las funciones $\psi_n(x)$, tomemos el sistema de polinomios de Legendre: $\psi_n(x) = P_n(2x - 1)$. En la fórmula (1) nos limitamos a dos sumandos, de manera que

$$\varphi_2(x) = a_1 \cdot P_0(2x - 1) + a_2 \cdot P_1(2x - 1).$$

Observando que

$$\psi_1 = P_0(2x - 1) = 1; \qquad \psi_2 = P_1(2x - 1) = 2x - 1,$$

se halla:

$$(\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 dx = 1; \qquad (\psi_1, \psi_2) = (\psi_2, \psi_1) = \int_0^1 (2x-1)\, dx = 0;$$

$$(\psi_2, \psi_2) = \int_0^1 (2x-1)^2\, dx = \frac{1}{3}.$$

Ahora

$$(K\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, t)\, \psi_1(t)\, dt \right) \psi_1(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^1 xt\, dx\, dt = \frac{1}{4},$$

$$(K\psi_1, \psi_2) = \int_0^1 \int_0^1 xt\,(2x-1)\, dx\, dt = \frac{1}{12},$$

$$(K\psi_2, \psi_2) = \int_0^1 \int_0^1 xt\,(2t-1)(2x-1)\, dx\, dt = \frac{1}{36}.$$

En este caso, el sistema (3) toma la forma

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} - \sigma & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{36} - \frac{1}{3}\sigma \end{vmatrix} = 0$$

o bien

$$\sigma^2 - \sigma\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

De aqui que $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \frac{1}{3}$. El mayor valor propio es $\sigma_2 = \frac{1}{3}$, lo que significa que la menor raíz característica es $\lambda = \frac{1}{\sigma_2} = 3$.

Hallar, por el método de Ritz, las menores raíces características de los núcleos ($a = 0$, $b = 1$):

312. $K(x, t) = x^2 t^2$.

313. $K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geqslant t, \\ x, & x \leqslant t. \end{cases}$

314. $K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} x(2-t), & x \leqslant t, \\ \frac{1}{2} t(2-x), & x \geqslant t. \end{cases}$

2. Método de las trazas. Llamemos m-ésima traza del núcleo $K(x, t)$ al número

$$A_m = \int_a^b K_m(t, t)\, dt,$$

donde $K_m(x, t)$ es el m-ésimo núcleo iterado.

Para la menor raíz característica λ_1, para un m suficientemente grande, es válida la siguiente fórmula aproximada:

$$\left|\lambda_1\right| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}.$$

La fórmula (1) da el valor $|\lambda_1|$ por exceso.

Las trazas de orden par de un núcleo simétrico se calculan mediante la fórmula

$$A_{2m} = \int_a^b \int_a^b K_m^2(x, t)\, dx\, dt = 2\int_a^b \int_a^x K_m^2(x, t)\, dt\, dx. \qquad (2)$$

Ejemplo. Hallar, por el método de las trazas, la primera raiz característica del núcleo

$$K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geqslant t, \\ x, & x \leqslant t, \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 1.$$

Resolución. Por cuanto el núcleo $K(x, t)$ es simétrico, es suficiente hallar $K_2(x, t)$ sólo para $t < x$.

Se tiene que

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, z) K(z, t)\, dz = \int_0^t z^2\, dz + \int_t^x zt\, dz + \int_x^1 xt\, dz =$$
$$= xt - \frac{x^2 t}{2} - \frac{t^3}{6}.$$

Ahora, por la fórmula (2) para $m = 1$ y $m = 2$ se halla respectivamente:

$$A_2 = 2\int_0^1 dx \int_0^x K_1^2(x, t)\, dt = 2\int_0^1 dx \int_0^x t^2\, dt = 2\int_0^1 \frac{x^3}{3}\, dx = \frac{1}{6},$$

$$A_4 = 2\int_0^1 dx \int_0^x K_2^2(x, t)\, dt =$$
$$= 2\int_0^1 dx \int_0^x \left(x^2 t^2 + \frac{x^4 t^2}{4} + \frac{t^6}{36} - x^3 t^2 - \frac{x t^4}{3} + \frac{x^2 t^4}{6}\right) dt =$$
$$= 2\int_0^1 \left(\frac{t^3 x^2}{3} + \frac{t^3 x^4}{12} + \frac{t^7}{7\cdot 36} - \frac{x^3 t^3}{3} - \frac{x t^5}{15} + \frac{x^2 t^5}{30}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} dx =$$
$$= 2\int_0^1 \left(\frac{x^5}{3} + \frac{x^7}{12} + \frac{x^7}{7\cdot 36} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^6}{15} + \frac{x^7}{30}\right) dx = \frac{17}{630}$$

Entonces, de acuerdo con la fórmula (1),

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{630}}} = 2{,}48.$$

Hallar, por el método de las trazas, la primera raíz característica de los núcleos siguientes ($a=0$, $b=1$):

315. $K(x, t) = xt$.

316. $K(x, t) = x^2 t^2$.

317. $K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} x(2-t), & x \leqslant t, \\ \frac{1}{2} t(2-x), & x \geqslant t. \end{cases}$

318. $K(x, t) = \begin{cases} -\sqrt{xt} \ln t, & x \leqslant t, \\ -\sqrt{xt} \ln x, & x \geqslant t. \end{cases}$

3. Método de Kellog. Sea $K(x, t)$ un núcleo simétrico, que consideraremos, para fijar ideas, definido positivo, y sea $\omega(x)$ una función cualquiera de $L_2(a, b)$. Formemos la sucesión de funciones

$$\left.\begin{aligned} \omega_1(x) &= \int_a^b K(x,t)\,\omega(t)\,dt, \\ \omega_2(x) &= \int_a^b K(x,t)\,\omega_1(t)\,dt, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_n(x) &= \int_a^b K(x,t)\,\omega_{n-1}(t)\,dt \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

y tomemos la sucesión numérica

$$\left\{ \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|} \right\}. \qquad (2)$$

Sean $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... las funciones propias ortonormales del núcleo $K(x, t)$, y $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ las raíces características respectivas. Sea, ahora, $\omega(x)$ ortogonal hacia las funciones $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{k-1}(x)$, pero no ortogonal hacia la función propia $\varphi_k(x)$. Entonces la sucesión (2) tiene por límite la k-ésima raíz característica λ_k.

En este caso, la sucesión de funciones $\left\{ \frac{\omega_n(x)}{\|\omega_n(x)\|} \right\}$ *converge* hacia cierta función, que es una combinación lineal de las funciones propias que corresponden a la raíz característica λ_k. Hacia el mismo límite que la sucesión (2) converge la sucesión

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}} \right\}. \tag{3}$$

Si $(\omega, \varphi_1) \neq 0$, se obtienen dos fórmulas aproximadas para la menor raíz característica:

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|}, \tag{4}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}}, \tag{5}$$

y la fórmula (4) da el valor de λ_1 por exceso. Si el núcleo $K(x, t)$ no es definido positivo, las fórmulas (4) y (5) dan el valor aproximado del menor valor absoluto de las raíces características del núcleo dado. Si $\omega(x)$ se escoge acertadamente, el método de Kellog es relativamente sencillo para los cálculos.

El defecto del método consiste en que de antemano no se sabe qué raíz característica se ha determinado.

Ejemplo. Calcular por el método de Kellog la menor raiz característica del núcleo $K(x, t) = x^2t^2$, $0 \leqslant x, t \leqslant 1$.

Resolución. Tomemos $\omega(x) = x$. Entonces

$$\omega_1(x) = \int_0^1 x^2t^2t\,dt = \frac{x^2}{4},$$

$$\omega_2(x) = \int_0^1 x^2 \frac{t^4}{4}\,dt = \frac{1}{4} x^2 \cdot \frac{1}{5},$$

$$\omega_3(x) = \int_0^1 \frac{1}{4 \cdot 5} x^2t^4\,dt = \frac{1}{4 \cdot 5^2} x^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_n(x) = \frac{1}{4 \cdot 5^{n-1}} x^2.$$

Ahora

$$\|\omega_n(x)\| = \frac{1}{4}\frac{1}{5^{n-1}} \sqrt{\int_0^1 x^4\,dx} = \frac{1}{4 \cdot 5^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

De este modo, según (4),

$$\lambda_1 \approx \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}}=5.$$

Hallar, por el método de Kellog, las menores raíces características de los siguientes núcleos:

319. $K(x,\ t)=xt;\quad 0\leqslant x,\ t\leqslant 1.$

320. $K(x,\ t)=\operatorname{sen} x \operatorname{sen} t;\quad -\pi\leqslant x,\ t\leqslant \pi.$

321. $K(x,\ t)=\begin{cases} t, & x\geqslant t; \\ x, & x\leqslant t; \end{cases}\quad 0\leqslant x,\ t\leqslant 1.$

322. $K(x,\ t)=\begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t), & x\leqslant t, \\ \frac{1}{2}t(2-x), & x\geqslant t; \end{cases}\quad 0\leqslant x,\ t\leqslant 1.$

RESPUESTAS

9. $\varphi(x) = -x + \int\limits_0^x (t - x)\,\varphi(t)\,dt.$

10. $\varphi(x) = 1 + \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt.$

11. $\varphi(x) = \cos x - \int\limits_0^x (x - t)\,\varphi(t)\,dt.$

12. $\varphi(x) = 5 - 6x + \int\limits_0^x [5 - 6(x - t)]\,\varphi(t)\,dt.$

13. $\varphi(x) = \cos x - x - \int\limits_0^x (x - t)\,\varphi(t)\,dt.$

14. $\varphi(x) = x - \operatorname{sen} x + e^x(x - 1) + \int\limits_0^x [\operatorname{sen} x - e^x(x - t)]\,\varphi(t)\,dt.$

15. $\varphi(x) = \cos x - 2x(1 + x^2) - \int\limits_0^x (1 + x^2)(x - t)\,\varphi(t)\,dt.$

16. $\varphi(x) = xe^x + 1 - x(x^2 - 1) - \int\limits_0^x \left[x + \frac{1}{2}(x^2 - x)(x - t)^2\right] \times$
$\times\,\varphi(t)\,dt.$

17. $\varphi(x) = x(x + 1)^2 + \int\limits_0^x x(x - t)^2\,\varphi(t)\,dt.$

19. $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,(x - t)\ (\lambda > 0).$ **20.** $e^{(1+\lambda)(x-t)}.$

21. $e^{\lambda(x-t)}e^{x^2-t^2}$. **22.** $\frac{1+x^2}{1+t^2}e^{\lambda(x-t)}$.

23. $\frac{2+\cos x}{2+\cos t}e^{\lambda(x-t)}$. **24.** $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}e^{\lambda(x-t)}$.

25. $a^{x-t}e^{\lambda(x-t)}$. **26.** $e^{x-t}(x-t+2)$.

27. $\frac{1}{4}e^{x-t}-\frac{9}{4}e^{-3(x-t)}$. **28.** $2xe^{x^2-t^2}$.

29. $\frac{4t^2+1}{2(2t+1)^2}\left[\frac{8}{4t^2+1}-4e^{-2(x-t)}\right]$; una de las soluciones de la ecuación diferencial respectiva es $y_1(x)=e^{-2x}$.

31. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\sqrt{2}(x-t)$. **32.** 1. **33.** $(x-t)e^{-(x-t)}$.

34. $e^{\frac{x-t}{2}}\left[\operatorname{ch}\frac{\sqrt{5}}{2}(x-t)+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{5}}{2}(x-t)\right]$.

35. $2e^{x-t}(1+x-t)$. **36.** $\varphi(x)=e^{2x}$.

37. $\varphi(x)=\frac{1}{5}e^{3x}-\frac{1}{5}\cos x+\frac{2}{5}\operatorname{sen} x$.

38. $\varphi(x)=3^x(1-e^{-x})$.

39. $\varphi(x)=e^x\operatorname{sen} x+(2+\cos x)e^x\ln\frac{3}{2+\cos x}$.

40. $\varphi(x)=e^{x^2-x}-2x$. **41.** $\varphi(x)=e^{x^2+2x}(1+2x)$.

42. $\varphi(x)=e^x(1+x^2)$.

43. $\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}+x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

44. $\varphi(x)=e^{\frac{x^2}{2}}(x+1)-1$. **45.** $\varphi(x)=e^{-x}\left(\frac{x^2}{2}+1\right)$.

46. $\varphi(x)=\operatorname{sen} x$. **47.** $\varphi(x)=\cos x$. **48.** $\varphi(x)=\operatorname{ch} x$.

49. $\varphi(x)=1$. **50.** $\varphi(x)=x$. **51.** $\varphi(x)=e^x$. **52.** $\varphi(x)=2$.

53. $\varphi(x)=2$. **54.** $\varphi(x)=x^2-2x$. **56.** $\varphi(x)=0$.

57. $\varphi_2(x)=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{13}{24}x^4+\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{18}x^6+$
$+\frac{1}{63}x^7\ (\varphi_0(x)=1)$.

58. $\varphi_3(x)=-x+\frac{x^4}{4}-\frac{x^7}{14}+\frac{x^{10}}{160}\ (\varphi_0(x)=0)$. **59.** $\varphi(x)=1$.

60. $\varphi(x)=x-\frac{x^2}{2}$. **61.** $\varphi(x)=\frac{1}{2}(3e^{2x}-1)$.

62. $\varphi(x)=\operatorname{sen} x$. **63.** $\varphi(x)=\frac{1}{3}(2\cos\sqrt{3}x+1)$.

64. $\varphi(x)=1+2x.$ **65.** $\varphi(x)=x+\frac{x^3}{6}.$

66. $\varphi(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\operatorname{sh} x.$ **67.** $\varphi(x)=x-\frac{x^3}{6}.$

68. $\varphi(x)=e^x.$ **69.** $\varphi(x)=\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{5}}{2}x.$

70. $\varphi(x)=1+2xe^x.$ **71.** $\varphi(x)=e^x(1+x)^2.$

72. $\varphi(x)=\frac{e^x+\operatorname{sen} x+\cos x}{2}.$ **73.** $\varphi_1(x)=\operatorname{sen} x;\ \ \varphi_2(x)=0.$

74. $\varphi_1(x)=3e^x-2;\ \ \varphi_2(x)=3e^x-2e^{2x}.$

75. $\varphi_1(x)=e^{2x};\ \ \varphi_2(x)=\frac{1}{2}(1-e^{2x}).$

76. $\begin{cases}\varphi_1(x)=(x+2)\operatorname{sen} x+(2x+1)\cos x;\\ \varphi_2(x)=\frac{2+x}{2}\cos x-\frac{1+2x}{2}\operatorname{sen} x.\end{cases}$

77. $\varphi_1(x)=2\operatorname{sen} x;\ \ \varphi_2(x)=2\cos x-1;\ \ \varphi_3(x)=x.$

78. $\varphi_1(x)=\cos x;\ \ \varphi_2(x)=\operatorname{sen} x;\ \ \varphi_3(x)=\operatorname{sen} x+\cos x.$

79. $\begin{cases}\varphi_1(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x;\\ \varphi_2(x)=1-x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x-\left(1+\frac{x}{2}\right)\cos x;\\ \varphi_3(x)=\cos x-1-\left(1+\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen} x.\end{cases}$

80. $\varphi(x)=e^x-1.$ **81.** $\varphi(x)=-e^x.$

82. $\varphi(x)=\frac{1}{2}x\operatorname{sen} x.$ **83.** $\varphi(x)=1-e^{-x}-xe^{-x}.$

84. $\varphi(x)=1-\cos x.$ **85.** $\varphi(x)=1-x+2(\operatorname{sen} x-\cos x).$

86. $\varphi(x)=e^{-x}-xe^{-x}.$ **87.** $\varphi(x)=c+2e^{-x}.$

88. $\varphi(x)=\cos x-\operatorname{sen} x.$ **89.** $\varphi(x)=\frac{\alpha}{\alpha-1}-\frac{e^{(\alpha-1)x}}{\alpha-1}.$

90. $\varphi(x)=\cos x-\operatorname{sen} x.$ **91.** $\varphi(x)=1-x\ln 3.$

92. $\varphi(x)=f'(x)-f(x)\ln a.$ **93.** $\varphi(x)=xe^{x^2}.$

94. $\varphi(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}.$ **95.** $\varphi(x)=e^{\frac{x^2}{2}}(x^2+2)-1.$

104. $I=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$ **106.** $\varphi(x)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{x^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)}.$

107. $\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^x\frac{\cos t}{\sqrt{x-t}}\,dt.$

108. $\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\left(x^{-\frac{1}{2}}+e^x\int\limits_0^x e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt\right).$

109. $\varphi(x)=\frac{1}{2}.$

110. $\varphi(x, y)=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)$, donde

$$g(x, y)=\iint\limits_{D_1}\frac{f(u, v)\,du\,dv}{\sqrt{(y-v)^2-(x-u)^2}}$$

y D_1 es un triángulo rectángulo isósceles con vértice en el punto (x, y) e hipotenusa en el eje Ou del plano UOV.

111. $\varphi(x)=\frac{4}{3}-\frac{2}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}x^{2/3}.$ **112.** $\varphi(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}.$

113. $\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)x^{1/4}}+\frac{2}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}x^{3/4}\right].$

114. $\varphi(x)=3.$

115. $\varphi(x)=\operatorname{sen} x.$ **116.** $\varphi(x)=1.$ **117.** $\varphi(x)=e^{-x}.$

118. $\varphi(x)=\frac{15}{4}x.$ **119.** $\varphi(x)=\cos x-2\operatorname{sen} x.$

120. $\varphi(x)=2x-x^2.$ **121.** $\varphi(x)=2\operatorname{sen} x.$

122. $\varphi(x)=3!\,(xe^{-x}-x^2e^{-x}).$ **123.** $\varphi(x)=J_0(x).$

124. $\varphi(x)=1-\frac{x^2}{2}.$ **125.** $\varphi(x)=1+2x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$

126. Se tiene $x^2-t^2=x^2-2xt+t^2+2xt-2t^2=(x-t)^2+2t(x-t)$. Por esto

$$\frac{x^3}{3}=\int\limits_0^x(x-t)^2\varphi(t)\,dt+2\int\limits_0^x t(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Pasando a las transformadas según Laplace y aplicando el teorema del producto y el de derivación de la imagen, en virtud del cual $t\varphi(t)\doteqdot-\Phi'(p)$, se obtiene

$$\frac{2}{p^4}=\frac{2}{p^3}\Phi(p)-\frac{2}{p^2}\Phi'(p)$$

o bien

$$\Phi'(p)=\frac{1}{p}\Phi(p)-\frac{1}{p^2}.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se halla que

$$\Phi(p)=C\cdot p+\frac{1}{2p}.$$

Como $\Phi(p)$ es una función-objeto, debe ser $\Phi(p)\longrightarrow 0$ para $p\longrightarrow\infty$, de modo que $C=0$ y, por lo tanto, $\Phi(p)=\frac{1}{2p}$, de donde $\varphi(x)=\frac{1}{2}$.

127. $\varphi(x)=C-x$. **128.** $\varphi(x)=C+J_0(2\sqrt{x})$.
129. $\varphi(x)=C+x$. **130.** $\varphi(x)=2+\delta(x)-\delta'(x)$.
131. $\varphi(x)=\delta(x)-\operatorname{sen} x$. **132.** $\varphi(x)=\delta(x)+3$.
133. $\varphi(x)=1+x+\delta(x)+\delta'(x)$.
134. $\varphi(x)=1$. **135.** $\varphi(x)=J_1(x)$.

136. $\varphi(x)=-I_1(x)$, $I_1(x)$ es la función modificada de Bessel de primera especie. En los problemas **141**, **142** las funciones indicadas no son soluciones de las ecuaciones integrales respectivas; en los problemas **137—140**, **143—145** lo son.

146. $$R(x,\ t;\ \lambda)=\frac{2x-t+\left(x+t-2xt-\frac{2}{3}\right)\lambda}{1-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}}.$$

147. $$R(x,\ t;\ \lambda)=\frac{x^2t-xt^2+xt\left(\frac{x+t}{4}-\frac{xt}{3}-\frac{1}{5}\right)\lambda}{1+\frac{\lambda^2}{240}}.$$

148. $R(x,\ t;\ \lambda)=\operatorname{sen} x\cos t$.

149. $$R(x,\ t;\ \lambda)=\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} t-\pi(1+2\operatorname{sen} x\operatorname{sen} t)\lambda}{1+2\pi^2\lambda^2}.$$

150. $$R(x,\ t;\ \lambda)=\frac{x+t+1+2\left(xt+\frac{1}{3}\right)\lambda}{1-2\lambda-\frac{4}{3}\lambda^2}.$$

151. $$R(x,\ t;\ \lambda)=\frac{1+3xt+\left(3\,\frac{x+t}{2}-3xt-1\right)\lambda}{1-2\lambda+\frac{1}{4}\lambda^2}.$$

152. $$R(x,\ t;\ \lambda)=\frac{4xt-x^2-\left(2x^2t-\frac{4}{3}x^2+x-\frac{4}{3}xt\right)\lambda}{1-\lambda+\frac{\lambda^2}{18}}.$$

153. $$R(x,\ t;\ \lambda)=\frac{e^{x-t}}{1-\lambda}.$$

154. $R(x,\ t;\ \lambda)=\dfrac{\operatorname{sen}(x+t)+\pi\lambda\cos(x-t)}{1-\pi^2\lambda^2}$.

155. $R(x,\ t;\ \lambda)=\dfrac{x-\operatorname{sh} t-2(e^{-1}+x\operatorname{sh} t)\lambda}{1+4e^{-1}\lambda^2}$.

156. $\varphi(x)=1$.

157. $\varphi(x)=\dfrac{1}{6}\left[x+\dfrac{(6x-2)\lambda-\lambda^2x}{\lambda^2-3\lambda+6}\right]$.

158. $\varphi(x)=\cos 2x$.

159. $\varphi(x)=\dfrac{e^x}{2}$.

160. $\varphi(x)=\dfrac{3x(2\lambda-3\lambda x+6)}{\lambda^2-18\lambda+18}$.

161. $K_{2n-1}(x,\ t)=\left(-\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}(x-t),\ K_{2n}(x,\ t)=$
$$=2(-1)^n\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\left(xt+\frac{1}{3}\right)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

162. $K_2(x,\ t)=\dfrac{\operatorname{sen}(x+t)}{2}-\dfrac{\pi}{4}\cos(x-t)$,
$$K_3(x,\ t)=\frac{4-\pi^2}{16}\operatorname{sen}(x-t).$$

163. $K_2(x,\ t)=\dfrac{2}{3}(x+t)^2+2x^2t^2+\dfrac{4}{3}xt+\dfrac{2}{5}$,
$$K_3(x,\ t)=\frac{56}{45}(x^2+t^2)+\frac{8}{3}x^2t^2-\frac{32}{9}xt+\frac{8}{15}.$$

164. $K_{2n-1}(x,\ t)=(2\pi)^{2n-2}(x+\operatorname{sen} t)$,
$K_{2n}(x,t)=(2\pi)^{2n-1}(1+x\operatorname{sen} t)\quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$.

165. $K_n(x,\ t)=xe^t$.

166. $K_n(x,\ t)=(-1)^{n-1}\left(\dfrac{e^{\pi}+1}{2}\right)^{n-1}e^x\cos t$.

167. $K_2(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{e^{x+t}+e^{2-x-t}}{2}+(t-x-1)e^{t-x}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\[2mm] \dfrac{e^{x+t}+e^{2-x-t}}{2}+(x-t-1)e^{x-t}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

168. $K_2(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{e^2+1}{2}e^{t-x}, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\[2mm] \dfrac{e^2+1}{2}e^{t+x}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

169. $R(x,\ t;\ \lambda)=\dfrac{2e^{x+t}}{2-(e^2-1)\lambda};\quad |\lambda|<\dfrac{2}{e^2-1}$.

170. $R(x,\ t;\ \lambda)=\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos t}{2-\lambda};\quad |\lambda|<2$.

171. $R(x, t; \lambda) = \frac{xe^{t+1}}{e-2\lambda}$; $|\lambda| < \frac{e}{2}$.

172. $R(x, t; \lambda) = \frac{3(1+x)(1-t)}{3-2\lambda}$; $|\lambda| < \frac{3}{2}$.

173. $R(x; t; \lambda) = \frac{5x^2t^2}{5-2\lambda}$; $|\lambda| < \frac{5}{2}$.

174. $R(x, t; \lambda) = \frac{3xt}{3-2\lambda}$; $|\lambda| < \frac{3}{2}$.

175. $R(x, t; \lambda) = \operatorname{sen} x \cos t + \cos 2x \operatorname{sen} 2t$.

176. $R(x, t; \lambda) = \frac{1}{1-\lambda} + \frac{3(2x-1)(2t-1)}{3-\lambda}$; $|\lambda| < 1$.

180. $\varphi(x) = \frac{\pi^2}{\pi-1} \operatorname{sen}^2 x + 2x - \pi$.

181. $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$.

182. $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}\lambda + \operatorname{ctg} x$.

183. $\varphi(x) = \frac{1+q^2}{1+q^2-\lambda}$.

184. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\lambda\pi^2}{8(1-\lambda)}$; $(\lambda \neq 1)$.

185. $\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda\Gamma(p+1)}$.

186. $\varphi(x) = \frac{2\lambda^2 x + \left(\frac{\lambda^2}{4} + \lambda\right) \ln x}{1 + \frac{29}{48}\lambda^2} + \frac{6}{5}(1-4x)$.

187. $\varphi(x) = \frac{2}{2-\lambda} \operatorname{sen} x$; $\lambda \neq 2$.

188. $\varphi(x) = \lambda\pi^3 \operatorname{sen} x + x$.

189. $\varphi(x) = 2\,\frac{2\cos x + \lambda\pi \operatorname{sen} x}{4 + \pi^2\lambda^2}$.

190. $\varphi(x) = \lambda\pi \operatorname{sen} x + \cos x$.

191. $\varphi(x) = \frac{15}{32}(x+1)^2 + \frac{5}{16}$.

192. $\varphi_1(x) = 0$; $\varphi_{2,3}(x) = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\, x$.

193. $\varphi_1(x) = 0$; $\varphi_2(x) = \frac{7}{2}x^2$; $\varphi_{3,4}(x) = \pm\frac{15}{4\sqrt{7}}x + \frac{5}{4}x^2$.

194. $\varphi_1(x) = 0$; $\varphi_{2,3}(x) = \pm 3x^2$. **195.** $\varphi(x) = 0$.

196. No tiene solución. **198.** $\lambda_1 = \frac{8}{\pi-2}$, $\varphi_1(x) = \operatorname{sen}^2(x)$.

199. No hay. **200.** $\lambda_1=\frac{1}{\pi}$; $\varphi_1(x)=\text{sen}\,x$.

201. $\lambda_1=-\frac{2}{\pi}$, $\lambda_2=\frac{2}{\pi}$; $\varphi_1(x)=\text{sen}\,x$, $\varphi_2(x)=\cos x$.

202. No hay raíces características y funciones propias reales.

203. $\lambda_1=\lambda_2=-3$; $\varphi(x)=x-2x^2$.

204. $\lambda_1=\frac{1}{2}$; $\varphi_1(x)=\frac{5}{2}x+\frac{10}{3}x^2$.

205. $\lambda_1=\frac{1}{4}$; $\varphi_1(x)=\frac{3}{2}x+x^2$.

206. $\lambda_1=-\frac{e}{2}$; $\varphi_1(x)=\text{sh}\,x$. **207.** No hay.

208. No hay raíces características y funciones propias reales.

209. $\lambda_n=-n^2\pi^2$; $\varphi_n(x)=\text{sen}\,n\pi x$ $(n=1, 2, \ldots)$.

210. $\lambda_0=1$; $\varphi_0(x)=e^x$; $\lambda_n=-n^2\pi^2$; $\varphi_n(x)=\text{sen}\,n\pi x+$ $+n\pi\cos n\pi x$ $(n=1,2, \ldots)$.

211. $\lambda_n=-\frac{1}{3}\mu_n^2$; $\varphi_n(x)=\text{sen}\,\mu_n x+\mu_n\cos\mu_n x$, donde μ_n son las raíces de la ecuación $\mu-\frac{1}{\mu}=2\,\text{ctg}\,\mu$.

212. $\lambda_n=4n^2-1$; $\varphi_n(x)=\text{sen}\,2nx$ $(n=1, 2, \ldots)$.

213. $\lambda_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-1$; $\varphi_n(x)=\text{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x$.

214. $\lambda_n=\frac{1-\mu_n^2}{\text{sen}\,1}$, $\varphi_n(x)=\text{sen}\,\mu_n(\pi+x)$ $(n=1, 2, \ldots)$, donde μ_n son las raíces de la ecuación $\text{tg}\,2\pi\mu=-\mu\,\text{tg}\,1$.

215. $\lambda_n=1-\mu_n^2$; $\varphi_n(x)=\text{sen}\,\mu_n x+\mu_n\cos\mu_n x$, donde μ_n son las raíces de la ecuación $2\,\text{ctg}\,\pi\mu=\mu-\frac{1}{\mu}$.

216. $\lambda_n=\frac{1+\mu_n^2}{2}$; $\varphi_n(x)=\text{sen}\,\mu_n x+\mu_n\cos\mu_n x$, donde μ_n son las raíces de la ecuación $2\,\text{ctg}\,\mu=\mu-\frac{1}{\mu}$.

217. $\lambda_n=-1-\mu_n^2$; $\varphi_n(x)=\text{sen}\,\mu_n x$, donde μ_n son las raíces de la ecuación $\text{tg}\,\mu=-\mu$ $(\mu>0)$.

221. a) $\frac{\pi^4}{90}$; b) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$; c) $\frac{1+e^{-2}}{8}$.

222. $\varphi_1(x)=1$; $\varphi_2(x)=2x-1$. **223.** $\varphi_1(x)=x$; $\varphi_2(x)=x^2$.

224. $\varphi_1(x)=1$; $\varphi_2(x)=x$; $\varphi_3(x)=3x^2-1$.

225. $\lambda_0=\frac{1}{\pi}$, $\varphi_0(x)=1$; $\lambda_1=\frac{2}{\pi}$, $\varphi_1^{(1)}(x)=\cos 2x$, $\varphi_1^{(2)}(x)=\text{sen}\,2x$.

227. $\lambda_0=\frac{3}{2\pi^3}$, $\varphi_0(x)=1$; $\lambda_n=(-1)^n\frac{n^2}{4\pi}$, $\varphi_n^{(1)}(x)=\cos nx$, $\varphi_n^{(2)}(x)=\text{sen}\, nx$ $(n=1, 2, \ldots)$.

228. a) $\frac{1}{3}$; $\varphi(x)=\pm\sqrt{3x}$; b) $\frac{2}{3}$; $\varphi(x)=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\,x$; c) 1; $\varphi(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{e^2-1}}\,e^x$. **229.** $\lambda=3$.

230. No hay puntos de bifurcación.

231. $$\varphi(x)=\begin{cases} C\cdot\text{sen}\, x, & \lambda=-\frac{2}{\pi},\\ C\cdot\cos x, & \lambda=\frac{2}{\pi},\\ 0, & \lambda\neq\pm\frac{2}{\pi}.\end{cases}$$

232. $$\varphi(x)=\begin{cases} C\cdot\text{arccos}\, x, & \lambda=1,\\ 0, & \lambda\neq 1.\end{cases}$$ **233.** $\varphi(x)=C$.

234. $\varphi(x)=C\,|x|$. **235.** $\varphi(x)=C(x-x^2)$.

236. $\varphi(x)=\text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$. **237.** $\varphi(x)=x-2+2e^x$.

238. $$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,\mu x+\text{sen}\,\mu(x-1)-\mu\cos\mu x}{2\mu\cos\frac{\mu}{2}\left\{\cos\frac{\mu}{2}+\frac{\mu}{2}\,\text{sen}\,\frac{\mu}{2}\right\}}, \\ \qquad \text{si}\quad \mu=\sqrt{2\lambda}, \quad \lambda>0 \\ \dfrac{\text{sh}\,\mu x+\text{sh}\,\mu(x-1)-\mu\,\text{ch}\,\mu x}{2\mu\,\text{ch}\frac{\mu}{2}\left\{\text{ch}\,\frac{\mu}{2}-\frac{\mu}{2}\,\text{sh}\,\frac{\mu}{2}\right\}}, \\ \qquad \text{si}\quad \mu=\sqrt{-2\lambda}, \quad \lambda<0;\end{cases}$$

μ no es raíz de las ecuaciones

$$\cos\frac{\mu}{2}\left(\cos\frac{\mu}{2}+\frac{\mu}{2}\,\text{sen}\,\frac{\mu}{2}\right)\neq 0;\quad \text{ch}\,\frac{\mu}{2}\left(\text{ch}\,\frac{\mu}{2}-\frac{\mu}{2}\,\text{sh}\,\frac{\mu}{2}\right)\neq 0.$$

239. $$\varphi(x)=\cos 2x+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,\text{sen}\,2nx}{(4n^2-1)(4n^2-3)}$$

(véase el problema Nº 212).

240. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\sqrt{\lambda+1}\,\pi+\lambda\cos\sqrt{\lambda+1}\,(x-\pi)}{(\lambda+1)\cos\sqrt{\lambda+1}\,\pi}, & \text{si } \lambda>-1;\\[2mm] \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda-1}\,\pi+\lambda\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda-1}\,(x-\pi)}{(\lambda+1)\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda-1}\,\pi}, & \text{si } \lambda<-1;\\[2mm] \dfrac{x^2}{2}-\pi x+1, & \text{si } \lambda=-1.\end{cases}$$

241. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{3(\operatorname{sh}\mu+\mu\operatorname{ch}\mu x)+\operatorname{sh}\mu(x-1)-2\mu\operatorname{ch}\mu(x-1)}{(1+2\mu^2)\operatorname{sh}\mu+3\mu\operatorname{ch}\mu}, & \lambda>0\ (\mu=2\sqrt{\lambda}).\\[2mm] \dfrac{3(\operatorname{sen}\mu+\mu\cos\mu x)+\operatorname{sen}\mu(x-1)-2\mu\cos\mu(x-1)}{(1-2\mu^2)\operatorname{sen}\mu+3\mu\cos\mu}, & \lambda<0\ (\mu=2\sqrt{-\lambda}).\end{cases}$$

242. $\varphi(x)=-1$. **243.** $\varphi(x)=\dfrac{e\operatorname{sh}\sqrt{2}\,x}{\operatorname{sh}\sqrt{2}+\sqrt{2}\operatorname{ch}\sqrt{2}}$.

244. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{-\operatorname{sh}1\cos\mu x}{\mu\operatorname{sen}\mu}, & \text{si } \mu=\sqrt{\lambda-1},\ \lambda>1;\\[2mm] \dfrac{\operatorname{sh}1\operatorname{ch}\mu x}{\mu\operatorname{sh}\mu}, & \text{si } \mu=\sqrt{1-\lambda},\ \lambda<1\end{cases}$$

245. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{ch}\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\mu\pi}{2}-\frac{\mu\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{\mu\pi}{2}}, & \text{si } \mu=\sqrt{2\lambda},\ \lambda>0,\\[2mm] \dfrac{\cos\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\frac{\mu\pi}{2}+\frac{\mu\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\mu\pi}{2}}, & \text{si } \mu=\sqrt{-2\lambda},\ \lambda<0.\end{cases}$$

$\varphi(x)\equiv 1$, si $\lambda=0$; μ no es raíz de las ecuaciones

$$\operatorname{ch}\frac{\mu\pi}{2}-\frac{\mu\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{\mu\pi}{2}=0,$$

$$\cos\frac{\mu\pi}{2}+\frac{\mu\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\mu\pi}{2}=0.$$

246. $\varphi(x)=1+\dfrac{2\lambda\pi}{2-\pi\lambda}\cos^2 x$, $\lambda\neq\dfrac{2}{\pi}$. Para $\lambda=\dfrac{2}{\pi}$ no hay solución

247. $\varphi(x)=\dfrac{e}{2-2\lambda}x$, $\lambda\neq\dfrac{e}{2}$. Para $\lambda=\dfrac{e}{2}$ no hay solución.

248. $\varphi(x)=x+\frac{2\pi^2\lambda}{1-\pi^2\lambda}|x-\pi|,\quad \lambda\neq\frac{1}{\pi^2}$. Para $\lambda=\frac{1}{\pi^2}$ no hay solución.

249. $\varphi(x)=\frac{3x(2\lambda^2x-2\lambda^2-5\lambda-6)+(\lambda+3)^2}{(\lambda+3)^2},\quad \lambda\neq-3.$

Para $\lambda=-3$ no hay solución.

250. $\varphi(x)=\begin{cases} x^3-\frac{3}{5}\frac{4\lambda+5}{4\lambda+3}x, & \text{si } \lambda\neq\frac{3}{2},\ \lambda\neq-\frac{3}{4}, \\ x^3-\frac{11}{15}x+Cx^2, & \text{si } \lambda=\frac{3}{2}. \end{cases}$

Para $\lambda=-\frac{3}{4}$ no hay solución.

251. $\varphi(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } \lambda\neq 1, \\ C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen} x, & \text{si } \lambda=1. \end{cases}$

252. $\varphi(x)=\frac{3-x^2}{2}-\operatorname{th}1$, si $\lambda=-1$; $\varphi(x)=$

$=\frac{1}{\mu^2}\left\{\frac{(\mu^2-1)\operatorname{ch}\mu x}{\operatorname{ch}\mu-\mu\operatorname{th}1\operatorname{sh}\mu}+1\right\}$, si $\lambda=\mu^2-1$, donde μ no es raíz de la ecuación $\operatorname{ch}\mu=\mu\operatorname{sh}\mu\operatorname{th}1$; $\varphi(x)=\frac{1}{\mu^2}\left\{\frac{(\mu^3+1)\cos\mu x}{\cos\mu+\mu\operatorname{th}1\cdot\operatorname{sen}\mu}-1\right\}$,

si $\lambda=-(\mu^2+1)$, donde μ no es raíz de la ecuación $\cos\mu+\mu\operatorname{sen}\mu\operatorname{th}1=0$. En los demás casos no hay solución.

253. $G(x,\xi)=\begin{cases} \xi-1+(\xi-2)x, & 0\leqslant x\leqslant\xi, \\ (\xi-1)x-1, & \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

254. Es evidente que la ecuación $y''(x)=0$ con las condiciones $y(0)=y(1)$, $y'(0)=y'(1)$ tiene el conjunto infinito de soluciones $y(x)=C$. Por consiguiente, no existe la función de Green para este problema de frontera.

255. La función de Green no existe.

256. $G(x,\xi)=\begin{cases} \frac{x^2}{6}(3\xi-x), & 0\leqslant x\leqslant\xi, \\ \frac{\xi^2}{6}(3x-\xi), & \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

257. $G(x,\xi)=\begin{cases} \frac{x(\xi-1)}{2}(x-x\xi+2\xi), & 0\leqslant x\leqslant\xi, \\ \frac{\xi}{2}[x(2-x)(\xi-2)+\xi], & \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

258. $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x(x-\xi)(\xi-1)}{2}, & 0\leqslant x\leqslant \xi, \\ -\dfrac{\xi(\xi-x)(x-1)}{2}, & \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

259. La función de Green no existe.
260. La función de Green no existe.

261. $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} k(\xi-1)\operatorname{sh} kx}{k\operatorname{sh} k}, & 0\leqslant x\leqslant \xi, \\ \dfrac{\operatorname{sh} k\xi\operatorname{sh} k(x-1)}{k\operatorname{sh} k}, & \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

262. $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{\cos\left(x-\xi+\frac{1}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}}, & 0\leqslant x\leqslant \xi, \\ \dfrac{\cos\left(\xi-x+\frac{1}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}}, & \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

263. La función de Green no existe.

264. $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{(hx+1)[H(\xi-1)-1]}{h+H+hH}, & 0\leqslant x\leqslant \xi, \\ \dfrac{(h\xi+1)[H(x-1)-1]}{h+H+hH}, & \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

265. $G(x,\xi)=\begin{cases} \alpha+1-\dfrac{1}{\xi}, & 0\leqslant x\leqslant \xi, \\ \alpha+1-\dfrac{1}{x}, & \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

266. $G(x,\xi)=\begin{cases} \xi-\ln\xi-1-\dfrac{x(\xi-1)^2}{2\xi}, & 0\leqslant x\leqslant \xi, \\ x-\ln x-1-\dfrac{\xi(x-1)^2}{2x}, & \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

267. $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}\left(1-\dfrac{1}{\xi^2}\right), & 0\leqslant x\leqslant \xi, \\ \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right), & \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

268. $G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}\left(\xi-\dfrac{1}{\xi}\right), & 0\leqslant x\leqslant \xi, \\ \dfrac{\xi}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right), & \xi\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$

269. $G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n\xi}\left[(x\xi)^n - \left(\dfrac{x}{\xi}\right)^n\right], & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{1}{2n\xi}\left[(x\xi)^n - \left(\dfrac{\xi}{x}\right)^n\right], & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

270. $G(x, \xi) = \begin{cases} -\dfrac{x \ln \xi}{\xi^2 (\ln \xi - 1)^2}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -\dfrac{\ln x}{\xi (\ln \xi - 1)^2}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

271. $G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1-x}{1+x}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1-\xi}{1+\xi}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

272. $G(x, \xi) = \begin{cases} \ln \dfrac{\xi}{l}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \ln \dfrac{x}{l}, & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$

273. $G(x, \xi) = \begin{cases} \left[\dfrac{1-\lambda}{2(1+\lambda)} e^{\xi-2l} - \dfrac{1}{2} e^{-\xi}\right] e^x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi \; (|\lambda| \neq 1), \\ \dfrac{1-\lambda}{2(1+\lambda)} e^{\xi-2l+x} - \dfrac{1}{2} e^{\xi-x}, & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$

Para $\lambda = 1$, $G(x, \xi) = -\dfrac{1}{2} e^{-|x-\xi|}$ no depende de l. Para $\lambda = -1$ la función de Green no existe.

274. $y = x - \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sen} x$. **275.** $y = \dfrac{x^2}{24}(x^2 - 4x + 6)$.

276. $y = \dfrac{1}{4}[(1-e^2)\ln x + x^2 - 1]$. **277.** $y = \dfrac{1}{4\pi}(2x-1) \operatorname{sen} \pi x$.

278. $y = 2[\operatorname{sh} x - \operatorname{sh}(x-1) - \operatorname{sh} 1]$.

279. $y = \operatorname{sh} x + (l - x) e^x$.

280. $y = 2\cos x + \left(2 - \dfrac{\pi^2}{4}\right) \operatorname{sen} x + x^2 - 2$.

281. $y(x) = \lambda \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi + \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{\pi^3}{96} x,$

donde $G(x, \xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{2\xi}{\pi} - 1\right) x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \xi \left(\dfrac{2x}{\pi} - 1\right), & \xi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

282. $y(x)=\lambda\int_0^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+e^x-ex+x-1,$

donde $G(x,\xi)=\begin{cases}(\xi-1)\,x, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ (x-1)\,\xi, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

283. $y(x)=\lambda\int_{-1}^1 G(x,\xi)\;y(\xi)\,d\xi+\frac{x}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}+\frac{2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2},$

donde

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(\xi-x), & -1\leqslant x\leqslant\xi,\\ \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(x-\xi), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

284. $y(x)=-\lambda\int_0^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\frac{1}{6}(2x^3+3x^2-17x-5),$

donde

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(\xi-2)\,x+\xi-1, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ (\xi-1)\,x-1, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

285. $y(x)=\lambda\int_0^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\frac{x^2}{24}(x^2-4x+6),$

donde

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{x^2}{6}(3\xi-x), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ \frac{\xi^2}{6}(3x-\xi), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

286. $y(x)=-\lambda\int_0^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\frac{1}{12}x(x-1)(x^2+x-1),$

donde

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}x(x-\xi)(\xi-1), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ -\frac{1}{2}\xi(\xi-x)(x-1), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

287. $y(x)=e^x-\lambda\int_0^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi,$

donde

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(1+x)\,\xi, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ (1+\xi)\,x, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

292. $\varphi(x)=\cos x$. **293.** $\varphi(x)=x^2-\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x-\cos x)$.

294. $\varphi(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3+\operatorname{ch} 2x$.

295. $\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda^2}[e^x-\lambda(e^x-1)]$.

296. $\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda^2}(\cos x+\lambda \operatorname{sen} x)$.

297. $\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda^2}[\cos x+\lambda(x-\operatorname{sen} x)]$.

298. $\varphi(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{1-\lambda}$. **299.** $\varphi(x)=\frac{2}{1+x^2}+\sqrt{\pi}e^{-x}$.

300. $\varphi(x)=\frac{f(x)}{1-\lambda^2}+\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\operatorname{sen} xt\,dt$ $(|\lambda|\neq 1)$.

301. $\varphi(x)=e^{-x}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{1+x^2}$.

302. $\tilde{\varphi}(x)=e^x-x-0{,}5010x^2-0{,}1671x^3-0{,}0422x^4$; $|\varphi-\tilde{\varphi}|<0{,}18$; la solución exacta es $\varphi(x)=1$. **303.** $\tilde{\varphi}(x)=x+\cos x$; $|\varphi-\tilde{\varphi}|<0{,}03$; la solución exacta es $\varphi(x)=1$.

304. $\tilde{\varphi}(x)=\frac{1}{2}(3x-1+e^{-x})$; $|\varphi-\tilde{\varphi}|<0{,}012$; la solución exacta es $\varphi(x)=x$.

305. $\tilde{\varphi}(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x+\left(\frac{58}{9}-\frac{16}{3}\operatorname{sen} 1-\frac{52}{15}\cos 1\right)x^3$; $|\varphi-\tilde{\varphi}|<0{,}0057$; la solución exacta es $\varphi(x)=x$.

306. $\varphi(x)=1+\frac{4}{9}x$; $\varphi_0(x)=1$.

307. $\varphi_n(x)=\left(1-\frac{5}{6^n}\right)x$; $\varphi_0(x)=0$; la solución exacta es $\varphi(x)=x$.

308. $\varphi_3(x)=1+\frac{22}{15}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{720}x^6$; $\varphi_0(x)=1$; la solución exacta es $\varphi(x)=\cos x+\operatorname{tg} 1\cdot\operatorname{sen} x$.

309. $\varphi_3(x)=6x^2+1$; ésta es la solución exacta.

310. $\varphi_3(x)=1$; ésta es la solución exacta. **311.** $\varphi_3(x)=1$; ésta es la solución exacta. **312.** $\lambda_1=5\frac{1}{7}$ (el valor exacto es $\lambda_1=5$). **313.** $\lambda_1=2{,}486$; $\lambda_2=32{,}181$. **314.** $\lambda_1=4{,}59$. **315.** $\lambda_1=3$. **316.** $\lambda_1=5$. **317.** $\lambda_1=4{,}19$. **318.** $\lambda_1=5{,}78$. **319.** $\lambda_1=3$. **320.** $\lambda_1=4$. **321.** $\lambda_1=2{,}475$. **322.** $\lambda_1=4{,}998$.

APENDICE

RESUMEN DE LOS METODOS FUNDAMENTALES DE RESOLUCION DE LAS ECUACIONES INTEGRALES

I. Ecuaciones integrales de Volterra

Ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{1}$$

1. Método de las resolventes. La solución de la ecuación (1) viene dada por la fórmula

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, t; \lambda)\, f(t)\, dt. \tag{2}$$

La función $R(x, t; \lambda)$ — la resolvente de la ecuación integral (1) — se define como la suma de la serie

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t), \tag{3}$$

donde los núcleos iterados $K_{n+1}(x, t)$ se hallan por la fórmula de recurrencia

$$\left.\begin{aligned} &K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K(x, z)\, K_n(z, t)\, dz, \\ &K_1(x, t) = K(x, t) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

2. Método de las aproximaciones sucesivas. La solución de la ecuación (1) se determina como el límite de la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, cuyo término general se halla mediante la fórmula de recurrencia

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\, \varphi_{n-1}(t)\, dt. \tag{5}$$

Con frecuencia es cómodo tomar la función $f(x)$ como aproximación nula $\varphi_0(x)$.

3. **Las ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie de convolución**

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt \tag{6}$$

se resuelven mediante la transformación de Laplace.

Sean $f(x)$, $K(x)$ y $\varphi(x)$ funciones-objeto y sean

$$f(x) \risingdotseq F(p), \qquad K(x) \risingdotseq \tilde{K}(p), \qquad \varphi(x) \risingdotseq \Phi(p).$$

Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación (6) y utilizando el teorema del producto, se halla que

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-\tilde{K}(p)}, \qquad \tilde{K}(p)\neq 1. \tag{7}$$

La función-objeto $\varphi(x)$ para $\Phi(p)$ será la solución de la ecuación (6).

4. **Las ecuaciones integrales de Volterra de primera especie**

$$\int_0^x K(x,\,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{8}$$

donde

$$K(x,\,x)\neq 0,$$

se reducen por derivación a ecuaciones integrales de Volterra de segunda especie del tipo

$$\varphi(x)=\frac{f'(x)}{K(x,\,x)}-\int_0^x \frac{K'_x(x,\,t)}{K(x,\,x)}\,\varphi(t)\,dt. \tag{9}$$

5. **Las ecuaciones integrales de Volterra de primera especie de convolución**

$$\int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{10}$$

se resuelven mediante la transformación de Laplace. Si $f(x)$, $K(x)$ y $\varphi(x)$ son funciones-objeto y

$$f(x) \risingdotseq F(p), \qquad K(x) \risingdotseq \tilde{K}(p), \qquad \varphi(x) \risingdotseq \Phi(p),$$

entonces, aplicando a ambos miembros de la ecuación (10) la transformación de Laplace y utilizando el teorema de la convolución, se obtiene

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{\tilde{K}(p)}. \tag{11}$$

La función-objeto $\varphi(x)$ de la función $\Phi(p)$ será solución de la ecuación (10).

II. Ecuaciones integrales de Fredholm

Ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(x). \tag{12}$$

1. Método de los determinantes de Fredholm. La solución de la ecuación (12) viene dada por la fórmula

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,\ t;\ \lambda)\,f(t)\,dt, \tag{13}$$

donde la función

$$R(x,\ t;\ \lambda)=\frac{D(x,\ t,\ \lambda)}{D(\lambda)},\quad D(\lambda)\neq 0, \tag{14}$$

se llama *resolvente de Fredholm* de la ecuación (12). Aquí

$$D(x,\ t;\ \lambda)=K(x,\ t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x,\ t)\,\lambda^n, \tag{15}$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C_n\lambda^n. \tag{16}$$

Los coeficientes $B_n(x,\ t)$, C_n se determinan por las fórmulas

$$B_n(x,\ t)=\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} K(x,\ t) & K(x,\ t_1) & \ldots & K(x,\ t_n)\\ K(t_1,\ t) & K(t_1,\ t_1) & \ldots & K(t_1,\ t_n)\\ K(t_2,\ t) & K(t_2,\ t_1) & \ldots & K(t_2,\ t_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ K(t_n,\ t) & K(t_n,\ t_1) & \ldots & K(t_n,\ t_n)\end{vmatrix}dt_1\ldots dt_n, \tag{17}$$

$B_0(x,\ t)=K(x,\ t)$,

$$C_n=\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} K(t_1,\ t_1) & K(t_1,\ t_2) & \ldots & K(t_1,\ t_n)\\ K(t_2,\ t_1) & K(t_2,\ t_2) & \ldots & K(t_2,\ t_n)\\ K(t_3,\ t_1) & K(t_3,\ t_2) & \ldots & K(t_3,\ t_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ K(t_n,\ t_1) & K(t_n,\ t_2) & \ldots & K(t_n,\ t_n)\end{vmatrix}dt_1\ \ldots\ dt_n. \tag{18}$$

Fórmulas de recurrencia:

$$B_n(x, t) = C_n K(x, t) - n \int_a^b K(x, s) B_{n-1}(s, t)\, ds, \tag{19}$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s, s)\, ds \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{20}$$

$$C_0 = 1, \quad B_0(x, t) = K(x, t).$$

2. Método de las aproximaciones sucesivas. La ecuación integral (12) puede ser resuelta mediante el método de las aproximaciones sucesivas. Para esto hagamos

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \lambda^n, \tag{21}$$

donde $\psi_n(x)$ se determinan por medio de las fórmulas:

$$\psi_1(x) = \int_a^b K(x, t) f(t)\, dt,$$

$$\psi_2(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_1(t)\, dt = \int_a^b K_2(x, t) f(t)\, dt,$$

$$\psi_3(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_2(t)\, dt = \int_a^b K_3(x, t) f(t)\, dt, \text{ etc.}$$

Aquí

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, z) K(z, t)\, dz,$$

$$K_3(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_2(z, t)\, dz$$

y en general

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, t)\, dz, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{22}$$

siendo $K_1(x, t) = K(x, t)$.

Las funciones $K_n(x, t)$ determinadas mediante las fórmulas (12) se denominan *núcleos iterados*.

3. **Ecuaciones integrales con núcleo degenerado:**

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\,b_k(t)\right]\varphi(t)\,dt=f(x). \qquad (23)$$

La solución de (23) es

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k a_k(x), \qquad (24)$$

donde las constantes C_k se hallan del sistema lineal

$$\left.\begin{array}{l}(1-\lambda a_{11})C_1-\lambda a_{12}C_2-\ldots-\lambda a_{1n}C_n=f_1,\\ -\lambda a_{21}C_1+(1-\lambda a_{22})C_2-\ldots-\lambda a_{2n}C_n=f_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -\lambda a_{n1}C_1-\lambda a_{n2}C_2-\ldots+(1-\lambda a_{nn})C_n=f_n.\end{array}\right\} \qquad (25)$$

Aquí

$$a_{km}=\int_a^b a_k(t)\,b_m(t)\,dt; \qquad f_m=\int_a^b b_m(t)\,f(t)\,dt \qquad (26)$$

$$(k,\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Si el determinante del sistema (25) es diferente de cero, la ecuación (23) tiene una solución única (24).

4. **Raíces características y funciones propias.** El valor del parámetro $\lambda\neq 0$, para el cual la ecuación integral homogénea de Fredholm de segunda especie

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=0 \qquad (27)$$

tiene una solución no nula $\varphi(x)\not\equiv 0$, se llama *raíz característica* de la ecuación (21) o del núcleo $K(x,\ t)$, y la solución no nula de dicha ecuación, *función propia* correspondiente a la raíz característica λ.

Si el núcleo $K(x,\ t)$ es continuo o de cuadrado sumable en el cuadrado $\Omega\ \{a\leqslant x,\ t\leqslant b\}$, a cada raíz característica λ le corresponde un número finito de funciones propias linealmente independientes.

En el caso de una ecuación con núcleo degenerado

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}a_k(x)\,b_k(t)\right]\varphi(t)\,dt=0, \qquad (28)$$

las raíces características son las raíces de la ecuación algebraica

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n}\\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1-\lambda a_{nn}\end{vmatrix}=0, \qquad (29)$$

donde $\Delta(\lambda)$ es el determinante del sistema (25); el grado de esta ecuación es $p \leqslant n$.

Si la ecuación (29) tiene p raíces distintas ($1 \leqslant p \leqslant n$), la ecuación integral (27) posee p raíces características $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, a las cuales les corresponden las funciones propias

$$\varphi_m(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(m)} a_k(x) \qquad (m = 1, 2, \ldots, p). \tag{30}$$

Aquí $C_k^{(m)}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) es una solución del sistema (25) correspondiente a la raíz característica λ_m ($m = 1, 2, \ldots, p$). Para un núcleo arbitrario (no degenerado) las raíces características son los ceros del determinante de Fredholm $D(\lambda)$, es decir, los polos de la resolvente $R(x, t; \lambda)$.

En el caso en que el núcleo $K(x, t)$ sea la función de Green de cierto problema homogéneo de Sturm-Liouville, la determinación de las raíces características y de las funciones propias se reduce a la resolución del problema antedicho de Sturm-Liouville.

5. Ecuaciones integrales simétricas no homogéneas de Fredholm de segunda especie:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{31}$$

$$K(x, t) = K(t, x).$$

Sean λ_n ($n = 1, 2, \ldots$) las raíces características, y $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$) las funciones propias respectivas del núcleo $K(x, t)$.

a) Si el parámetro $\lambda \neq \lambda_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), la ecuación integral (31) tiene una solución única, continua en $[a, b]$:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}\varphi_n(x), \tag{32}$$

donde

$$a_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx. \tag{33}$$

La serie del segundo miembro de (32) converge en forma absoluta y uniforme en $[a, b]$.

b) Si el parámetro λ coincide con una de las raíces características, por ejemplo, $\lambda = \lambda_k$, de rango q (multiplicidad de la raíz característica λ_k), la ecuación (31) posee un conjunto infinito de soluciones si, y sólo si, $f(x)$ es ortogonal a todas las funciones propias de la raíz característica λ_k, es decir, si se cumplen las q condiciones

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots q). \tag{34}$$

Todas estas soluciones vienen dadas por la fórmula

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(x)+$$
$$+C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\ldots+C_q\varphi_q(x), \quad (35)$$

siendo $C_1, \ldots, C_q$ constantes arbitrarias, y $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_q(x)$, las funciones propias del núcleo, correspondientes a la raíz característica λ_k.

Si por lo menos una de las q condiciones (34) no se cumple, la ecuación (31) no tiene solución.

Si la función $f(x)$ es ortogonal a todas las funciones propias $\varphi_n(x)$ del núcleo $K(x, t)$, la solución de la ecuación (31) será la propia función: $\varphi(x)=f(x)$.

6. Ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie cuyas funciones propias son funciones ortogonales clásicas:

a)
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^l K(x, t)\varphi(t)\,dt=0, \quad (33)$$

donde

$$K(x, t)=\begin{cases}\dfrac{x(l-t)}{l}, & x\leqslant t,\\[2mm] \dfrac{t(l-x)}{l}, & t\leqslant x.\end{cases}$$

Las raíces características son:

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Las funciones propias son:

$$\varphi_n(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi n x}{l} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

b)
$$\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1} K(x, t)\varphi(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt=0,$$

donde

$$K(x, t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-t}, & x\leqslant t,\\[2mm] \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+t}{1-x}, & t\leqslant x.\end{cases}$$

Las raíces características son $\lambda_n=n(n+1)$. Las funciones propias, $\varphi_n(x)=P_n(x)$, siendo $P_n(x)$ los polinomios de Legendre, que se definen mediante la fórmula

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Puesto que $P_0(x)=1$ y $P_1(x)=x$, aplicando la fórmula de recurrencia

$$(n+1)\,P_{n+1}(x)=x\,(2n+1)\,P_n(x)+nP_{n-1}(x),$$

se pueden hallar los polinomios de Legendre de cualquier grado $n=2,\ 3,\ \ldots$

c)
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\infty}K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=0,$$

donde

$$K(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\nu}\left(\dfrac{x}{t}\right)^{\nu}, & x\leqslant t,\\[2mm] \dfrac{1}{2\nu}\left(\dfrac{t}{x}\right)^{\nu}, & t\leqslant x.\end{cases}$$

Las raíces características son $\lambda_n=\alpha_n^2$, siendo α_n las raíces de la ecuación trascendente $J_\nu(\alpha)=0$. Las funciones propias son $\varphi_n(x)=J_\nu(\alpha_n x)$, en donde $J_\nu(x)$ son las funciones de Bessel de primera especie de orden ν. Las funciones de Bessel de primera especie se definen mediante la fórmula

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

d)
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{+\infty}K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=0,$$

donde

$$K(x,\ t)=\begin{cases}e^{\frac{x+t}{2}}\displaystyle\int_t^{+\infty}\frac{e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau, & x\leqslant t,\\[2mm] e^{\frac{x+t}{2}}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau, & t\leqslant x.\end{cases}$$

Las raíces características son:

$$\lambda_n=n+1.$$

Las funciones propias son:

$$\varphi_n(x)=e^{-x/2}L_n(x),$$

donde $L_n(x)$ son los polinomios de Chebishev-Laguerre, que se definen mediante la fórmula

$$L_n(x)=e^{x}\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}).$$

Aplicando la fórmula de recurrencia

$$L_{n+1}(x)=(2n+1-x)\,L_n(x)-n^2L_{n-1}(x)\quad(n\geqslant 1),$$

se pueden obtener los polinomios de Chebishev-Laguerre de cualquier grado n, sabiendo que $L_0(x)=1$ y $L_1(x)=-x+1$.

e)
$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=0,$$

donde

$$K(x,\ t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{x^2+t^2}{2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\tau^2}d\tau\int_{t}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau, & x\leqslant t,\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{x^2+t^2}{2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}e^{-\tau^2}d\tau\int_{x}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau, & t\leqslant x.\end{cases}$$

Las raíces características son:

$$\lambda_n=2(n+1)\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Las funciones propias son:

$$\varphi_n(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x),$$

siendo $H_n(x)$ los polinomios de Chebishev-Hermite, que se definen mediante la fórmula

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}=$$
$$=(2x)^n-\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\ldots$$

Conociendo $H_0(x)=1$ y $H_1(x)=2x$ se pueden obtener los polinomios de Chebishev-Hermite de cualquier grado, aplicando la fórmula de recurrencia

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x).$$

BIBLIOGRAFIA

1. Angot, André. Compléments de Mathématiques, Paris, 1957.
2. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, volume I.
3. Goursat, Édouard. Cours d'Analyse Mathématique, tomo III; Gauthier-Villars, Paris.
4. Ince, E. L. Ordinary Differential Equations. Longmans, Green, 1927.
5. Lalesco, T. Introduction à la Theorie des Equations Integrales, Paris, 1912.
6. Lovitt, W. V. Linear Integral Equations. McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1924.
7. Mijlin S. G. Lecciones de Ecuaciones Integrales Lineales, Fizmatguiz, 1959 (en ruso).
8. Morse P. M., Feshbach H. Methods of Theoretical Physics, Part I, New York. London, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1953.
9. Petrovski, I. G. Lecciones de la Teoría de las Ecuaciones Integrales, „Nauka", 1965.
10. Schmeidler W. Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Leipzig, 1955.
11. Smirnov, V. I. Curso de Matemáticas Superiores, tomo 4, Fizmatguiz, 1958 (en ruso).
12. Tricomi F. G. Lezioni Sulle Equazioni Integrali, Torino, 1948.

La editorial Mir publica:

BRONSTEIN I., SEMENDIAEV K.

GUIA DE MATEMATICAS.

El guia está compuesto por el doctor en ciencias físico-matemáticas, catedrático Konstantin Semendiaev y por el catedrático Ilya Bronstéin. Contiene seis secciones: «Tablas y gráficas», «Matemática elemental», «Geometría analítica y diferencial», «Fundamentos del análisis matemático», «Capitulos complementarios del análisis». «Tratamiento de las observaciones».

Las tablas que vienen en el texto se dan con tres o cuatro cifras significativas y contienen los valores de los logaritmos decimales y naturales, de las funciones exponenciales, hiperbólicas y trigonométricas, de la función Gamma, de las funciones de Bessel, de los polinomios de Legendre, de las integrales elípticas, de la integral de probabilidad y otras tablas.

La matemática elemental comprende el Algebra, la Geometría y la Trigonometría. Los fundamentos del análisis matemático contiene una introducción al análisis, el cálculo diferencial e integral y las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales de 1° y 2° órdenes.

Los capítulos complementarios del análisis abarcan los números complejos y las funciones de variable compleja, el cálculo vectorial (álgebra vectorial, función vector de un escalar y teoría de campos) y las series de Fourier (análisis armónico).

En la última sección se exponen los fundamentos de la teoría de probabilidades y de la teoría de errores, así como fórmulas empíricas y de interpolación.

Además de la gran cantidad de fórmulas que se exponen, los autores presentan una teoría breve y muestran el modo de resolver los problemas.

En lo fundamental, el guia está dedicado para los ingenieros y los estudiantes de ingeniería, a pesar de que puede ser útil también para los que trabajan en Institutos de investigación, laboratorios, etc.

En ruso ha sido editado 11 veces. Está traducido a varios idiomas.

MARKUSHEVICH A.

TEORIA DE LAS FUNCIONES ANALITICAS. *Tomo I.*

El primer tomo de la presente obra del vicepresidente de la Academia de Ciencias Pedagógicas de la URSS, doctor en ciencias físico-matemáticas, catedrático Alekséy Markushévich, contiene cuatro capítulos: «Conceptos fundamentales», «La derivabilidad y su significado geométrico. Las funciones elementales», «Integrales y series de potencias», «Diversos series. Residuos. Funciones inversas e implícitas».

Se hace un estudio detallado de los números complejos, proyección estereográfica, funciones elementales de variable compleja, uniformes y multiformes, integral de Cauchy y de tipo Cauchy, series de potencias, productos infinitos. Se expone el principio del módulo máximo de una función analítica y el concepto de puntos singulares de un elemento de una función analítica. Se muestran diversos métodos de desarrollo de las funciones en serie. Se estudia también el comportamiento de la serie de potencias en la frontera del círculo de convergencia, se expone el principio de compacidad.

Se estudian las series de Laurent, Dirichlet y se demuestran los teoremas de Runge y Montel respecto de la convergencia de una sucesión de polinomios a una función localmente analítica dada. En el último capítulo, además del tema indicado, se deducen las fórmulas más conocidas de interpolación en el campo complejo.

Al final del libro se inserta una bibliografía muy extensa de las obras fundamentales que tratan de los temas expuestos.

El libro está dedicado para los estudiantes de las facultades de matemáticas de las Universidades o de distintos centros de enseñanza superior. Puede servir también para los ingenieros y científicos que deseen elevar su nivel científico en esta materia. Algunos temas pueden ser útiles para quienes preparan la tesis doctoral.

MARKUSHEVICH A.

TEORIA DE LAS FUNCIONES ANALITICAS. *Tomo II.*

El segundo tomo de la obra presentada por el conocido científico, vicepresidente de la Academia de Ciencias Pedagógicas de la URSS, Doctor en ciencias fisico-matemáticas, catedrático Aleksey Markushévich, contiene los capítulos V—VIII: «Transformaciones conformes. Aplicación a los problemas de la aproximación de las funciones por polinomios», «Funciones armónicas y subarmónicas. El significado de las funciones analíticas en la hidromecánica. Funciones de forma acotada», «Funciones enteras y meromorfas», «Concepto de superficie de Riemann. Prolongación analítica».

Al final se expone un apéndice del autor: «Sobre la base en el espacio de las funciones analíticas».

En este tomo se demuestran los teoremas de Riemann y Hilbert de la existencia de una transformación conforme de un recinto simplemente conexo en un círculo, se estudian las propiedades de las funciones univalentes y se demuestra el conocido teorema de Merguelián respecto de la aproximación uniforme de las funciones continuas en el campo complejo por polinomios. Se expone la fórmula de Poisson-Jentzsch. Se demuestra el teorema de Hadamard de los tres círculos, el teorema de las dos constantes, el teorema de Phragmén-Lindelöf. Se estudian las propiedades frontera de las funciones de forma acotada. Se dan los conceptos de orden de crecimiento y tipo de una función analítica y de indicatriz de crecimiento. Se demuestran los teoremas de Picard. En el libro se hace una exposición de las funciones elípticas y de la función Gamma. Se estudia el concepto de función característica de una función micromorfa. Se dan los conceptos de superficie abstracta de Riemann, de función analítica completa y de imagen analítica. Se demuestra el teorema de monodromía, el principio de simetría. Se da el concepto de función modular, el criterio de normalidad de una familia de funciones analíticas y se demuestra el teorema grande de Picard.

En el apéndice se exponen algunas de las investigaciones científicas realizadas por el autor respecto del problema de la base en el espacio de las funciones analíticas.

Este tomo, así como el primero, está dedicado para los estudiantes y postgraduados de las facultades de matemáticas de los centros de enseñanza superior.

Puede servir como punto de partida para emprender investigaciones científicas en algunos de los temas tratados.

Al final de la obra se expone una bibliografía muy amplia de las obras fundamentales relacionadas con los temas expuestos.